ГЕОФИЗИЧЕСКИЕ ИССЛЕДОВАНИЯ, 2017, том 18, № 4, с.50-56. DOI: 10.21455/gr2017.4-4

УДК 551.466.8

ОБ АТМОСФЕРНЫХ ВНУТРЕННИХ ВОЛНАХ В НЕОДНОРОДНОЙ ПО ГОРИЗОНТАЛИ СТРАТИФИЦИРОВАННОЙ СРЕДЕ

© 2017 г. С.Л. Шалимов

Институт физики Земли им. О.Ю. Шмидта РАН, г. Москва, Россия

Показано, что структура атмосферных внутренних волн в стратифицированной среде при наличии зависимости частоты Брента–Вяйсяля ω_b от горизонтальной координаты x в линейном приближении демонстрирует отражение, возрастание амплитуды и уменьшение длины волны вдоль направления, в котором происходит уменьшение $\omega_b(x)$ в ограниченном по вертикали атмосферном слое. Такая тенденция может приводить к разрушению волны в окрестности точки $\omega=\omega_b(x)$ и, соответственно, к генерации турбулентности.

Ключевые слова: атмосферные внутренние гравитационные волны, неоднородная среда.

Введение

Типичное пространственное распределение параметров в атмосфере характеризуется как вертикальной, так и горизонтальной неоднородностью. Горизонтальные градиенты средних полей плотности, температуры и течений обычно намного меньше вертикальных. Однако групповая скорость внутренних гравитационных волн (ВГВ) направлена чаще всего под малым углом к горизонту, и их пакеты могут распространяться на сотни и тысячи километров по горизонтали. На таких расстояниях становится необходимым учет влияния горизонтальной неоднородности среды на распространение волн.

Сильное воздействие внутренних гравитационных волн на верхнюю атмосферу при их распространении вверх обычно связывают с экспоненциальным ростом амплитуды колебательной скорости из-за быстрого падения плотности атмосферы с высотой. Между тем, при наличии в верхней атмосфере двумерной неоднородности температуры или скорости ветра (как в вертикальном, так и в горизонтальном направлениях) может реализоваться другой механизм сильного роста волнового поля. Известно, что для внутренних гравитационных волн, благодаря двумерной неоднородности, может возникнуть сужающийся горизонтальный волновод, в окрестности вершины которого происходит так называемый коллапс исходной волны. При этом пакет ВГВ, смещаясь к точке вырождения волновода и увеличивая свою амплитуду, сжимается[1]. Ранее такие процессы для несжимаемой жидкости рассматривались применительно к горизонтальному пикноклину в океане [*Бадулин, Цимринг, Шрира,* 1983; *Ерохин, Сагдеев,* 1985а, б] и горизонтальной неоднородности в атмосфере [*Самодуров,* 1974]. В случае атмосферы необходим учет сжимаемости газа [*Ерохин, Некрасов, Шалимов,* 1994]. При достаточно большой амплитуде волны вдали от точки коллапса необходимо учитывать нелинейность, которая может повлиять на линейный коллапс раньше, чем проявится вязкость [*Nekrasov, Erokhin,* 2005].

[1] В рамках гидродинамики идеального газа происходит неограниченное сжатие пакета; учет же вязкости приводит к остановке коллапса на некотором расстоянии от вершины волновода.

Общее описание динамики внутренних гравитационных волн в неоднородной среде оказывается достаточно сложной задачей уже в линейном приближении. Одновременный учет вертикальной и горизонтальной неоднородностей приводит к уравнению в частных производных, не допускающему разделения переменных. Однако в среде, в которой масштаб горизонтальной неоднородности много больше масштаба вертикальной, для описания распространения рассматриваемых волн может быть применена модификация метода Вентцеля–Крамерса–Бриллюэна [*Badulin, Shrira, Tsimring,* 1985]. Это позволяет осуществить приближенное разделение переменных и рассматривать отдельно вертикальную структуру мод и медленную эволюцию параметров волны вдоль горизонтальных координат.

В настоящей работе представлен частный случай из упомянутого класса задач – рассматривается динамика внутренних гравитационных волн в стратифицированной среде при наличии зависимости частоты Брента–Вяйсяля от горизонтальной координаты.

Основные уравнения и результаты

Известно, что внутренние гравитационные волны, имеющие частоту ω, не существуют в области, где $\omega > \omega_b$ (здесь ω_b – частота Брента–Вяйсяля) [*Госсард, Хук,* 1978]. Если частота Брента–Вяйсяля зависит только от вертикальной координаты *z*, то область распространения ВГВ будет ограничена горизонтальными плоскостями, отражающими волны в область $\omega < \omega_b(z)$ [*Эккарт,* 1963]. В настоящей работе представлен другой случай – распространение рассматриваемых волн в стратифицированной среде при наличии зависимости частоты Брента–Вяйсяля от горизонтальной координаты *x*.

Уравнения, описывающие распространение внутренних гравитационных волн без учета вязкости и теплопроводности, имеют вид [*Госсард, Хук,* 1978]:

$$\begin{aligned} &\rho\frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\nabla p + \rho g, \\ &\frac{d\rho}{dt} + div\rho\mathbf{v} = 0, \\ &\frac{dp}{dt} + \gamma p\,div\mathbf{v} = 0, \end{aligned} \tag{1}$$

где $\mathbf{v}$, p, ρ – скорость, давление и плотность газа; g – ускорение силы тяжести; γ – адиабатическая постоянная; $d/dt = \partial/\partial t + (\mathbf{v}\cdot\nabla)$.

Рассмотрим двумерный случай, когда возмущения неоднородны вдоль одной горизонтальной (*x*) и вертикальной (*z*) координат. Учтем слабую сжимаемость внутренних гравитационных волн и введем функцию потока ψ:

$$\delta\mathbf{v}_x \simeq \frac{\partial\psi}{\partial z}, \quad \delta\mathbf{v}_z \simeq -\frac{\partial\psi}{\partial x}. \tag{2}$$

Распишем первое из уравнений системы (1) по координатам; в полученные выражения подставим уравнения (2) и после ряда преобразований найдем уравнение для функции потока ψ [*Некрасов, Шалимов,* 2002]:

$$\frac{\partial}{\partial t}\Delta\psi = \frac{\partial q}{\partial x} + \{\psi, \Delta\psi\}, \tag{3}$$

в котором

$$q=\frac{1}{\rho_0^2}\left(\frac{\partial\rho_0}{\partial z}\delta p-\frac{\partial p_0}{\partial z}\delta\rho\right),$$

$$\{a,b\}=\frac{\partial a}{\partial x}\frac{\partial b}{\partial z}-\frac{\partial a}{\partial z}\frac{\partial b}{\partial x},$$

$$\Delta=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2},$$

где $\delta p,\delta\rho$ – возмущенные давление и плотность; p_0,ρ_0 – невозмущенные давление и плотность. В уравнении (3) нелинейные слагаемые, связанные с δp, $\delta\rho$, малы по сравнению с конвективной нелинейностью для возмущений скорости, поэтому ими пренебрегаем.

Из второго и третьего уравнений системы (1) получим ещё одно уравнение, связывающее величины q и ψ:

$$\frac{\partial q}{\partial t}+c\,div\delta\mathbf{v}=\{\psi,q\}, \tag{4}$$

в котором $c=\frac{1}{\rho_0}\left(c_s^2\frac{\partial\rho_0}{\partial z}-\frac{\partial p_0}{\partial z}\right)$, $c_s^2=\frac{\gamma p_0}{\rho_0}$ – скорость звука. Комбинируя первое и третье уравнения системы (1), при условии $c_s^2\Delta >> \partial^2/\partial t^2$ найдем выражение для $div\delta\mathbf{v}$:

$$div\delta\mathbf{v}\approx\frac{1}{\gamma p_0}\frac{\partial p_0}{\partial z}\frac{\partial\psi}{\partial x}. \tag{5}$$

Подставив (5) в (4), получим

$$\frac{\partial q}{\partial t}=-\omega_b^2\frac{\partial\psi}{\partial x}+\{\psi,q\}, \tag{6}$$

где $\omega_b^2=(c/\gamma p_0)(\partial p_0/\partial z)$.

Для случая сильной нелинейности система уравнений (3) и (6) рассмотрена в работе [*Некрасов, Шалимов,* 2002]. Ниже, считая нелинейность слабой и в первом приближении не учитывая нелинейные слагаемые в этой системе уравнений, будем искать решения, гармонические по времени $\sim\exp(i\omega t)$. Тогда, вводя новую функцию $\psi=\partial\phi/\partial x$, из системы (3), (6) получим уравнение для ϕ:

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial z^2}+\alpha\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}=0, \tag{7}$$

где $\alpha=\left(1-\omega_b^2/\omega^2\right)$. Для однородной среды в фурье-представлении из (7) следует дисперсионное соотношение для ВГВ – $\omega=\omega_b k_x\Big/\left(k_x^2+k_z^2\right)^{1/2}$. Считая среду неоднородной, рассмотрим в изотермической атмосфере слой с линейным по вертикали профилем плотности, в котором модельная плотность среды и частота Брента–Вяйсяля имеют вид

$$\rho_0=\rho_{00}\left(1+(z/H)\cdot\exp(-x/L)\right),\ |z|\le H,\ 0\le x\le L,$$
$$\omega_b^2\simeq\frac{g(\gamma-1)}{\gamma}\frac{1}{\rho_{00}}\frac{\partial\rho_0}{\partial z}=\frac{g(\gamma-1)}{\gamma H}\exp(-x/L); \tag{8}$$

здесь H, L – масштабы неоднородности по вертикали и горизонтали соответственно, причем $L>>H$. Подобное (8) распределение плотности может быть обусловлено крупномасштабным течением, направленным перпендикулярно плоскости xz.

Введем безразмерные параметры $r_0 = L/H$, $\zeta = z/H$, $\chi = \omega^2/\omega_b^2(x)$, после чего уравнение (7) примет вид

$$r_0^2 \frac{\partial^2\phi}{\partial\zeta^2} - (1-\chi)\chi\frac{\partial^2\phi}{\partial\chi^2} - (1-\chi)\frac{\partial\phi}{\partial\chi} = 0. \tag{9}$$

Решение уравнения (9) ищем в виде

$$\phi = \varphi(\chi)\exp(i\kappa\zeta),$$

где κ – нормированное волновое число, соответствующее координате ζ. Тогда из (9) получаем уравнение для $\varphi(\chi)$:

$$(1-\chi)\chi\frac{\partial^2\varphi}{\partial\chi^2} + (1-\chi)\frac{\partial\varphi}{\partial\chi} + \lambda^2\varphi = 0, \tag{10}$$

где $\lambda = \kappa r_0$. Уравнение (10) принадлежит гипергеометрическому типу; два его линейно независимых решения для области $\chi>1$, что соответствует $\omega > \omega_b$, имеют следующий вид [*Бейтмен, Эрдейи,* 1965]:

$$\varphi_1 = d_1\chi^{-\lambda}F\left(\lambda;\lambda;2\lambda+1;\frac{1}{\chi}\right), \tag{11}$$

$$\varphi_2 = d_2\chi^{\lambda}F\left(-\lambda;-\lambda;-2\lambda+1;\frac{1}{\chi}\right), \tag{12}$$

где d_1, d_2 – постоянные; $F(a,b,c,z)$ – гипергеометрическая функция. Поскольку в области $\omega > \omega_b$ не существует осциллирующих решений уравнения (10), то постоянную d_2 перед растущим по χ решением из физических соображений положим равной нулю. Остающееся решение затухает в области $\chi>1$ и имеет аналитическое продолжение в область $\chi<1$, которое определяется равенством

$$\varphi_1 = c_1F(\lambda;-\lambda;1;\chi), \tag{13}$$

в котором c_1 – постоянная [*Бейтмен, Эрдейи,* 1965].

Гипергеометрическая функция может быть представлена интегралом [*Бейтмен, Эрдейи,* 1965]:

$$F(a,b,c,z) = A\oint_C \tau^{a-1}(1-\tau)^{c-a-1}(1-z\tau)^{-b}\,d\tau,$$

где A – нормирующий множитель; τ – комплексная переменная; C – замкнутый контур, включающий в себя, например, точки τ=1, τ=0 и не включающий точку $\tau = 1/z$. Соответственно, гипергеометрическая функция, входящая в решение (13), может быть представлена как

$$F(\lambda;-\lambda;1;\chi) = A_1\oint_C \exp\left[\lambda\cdot\ln\frac{\tau(1-\chi\tau)}{1-\tau}\right]\frac{d\tau}{\tau}. \tag{14}$$

Учитывая, что λ>>1, для анализа этого интеграла можно воспользоваться методом перевала. Оценка по методу перевала для интегралов представленного типа имеет следующий вид [*Лаврентьев, Шабат,* 1965]:

$$I = \oint_C \exp\left[\lambda\cdot f(\tau)\right]\varphi(\tau)d\tau \approx \exp\left[\lambda\cdot f(\tau_0)\right]\left(\frac{2\pi}{\lambda f''(\tau_0)}\right)^{1/2}\cdot\varphi(\tau_0)\exp(i\theta). \tag{15}$$

Здесь τ_0 – точка перевала, которая определяется из уравнения $f'(\tau)=0$; θ – угол, характеризующий направление прохождения точки перевала при движении по контуру интегрирования.

Для функции $f(\tau)=\ln\left[\tau(1-\chi\tau)/(1-\tau)\right]$ имеем две точки перевала $\tau_0=1\pm i\sqrt{(1-\chi)/\chi}$ (в области $\chi<1$), которые являются точками одинакового уровня, т.е. $\operatorname{Re} f(\tau_{01})=\operatorname{Re} f(\tau_{02})$, в связи с чем надо брать сумму выражений (15). Вычислив функции в точках перевала, находим для $\chi>1/2$

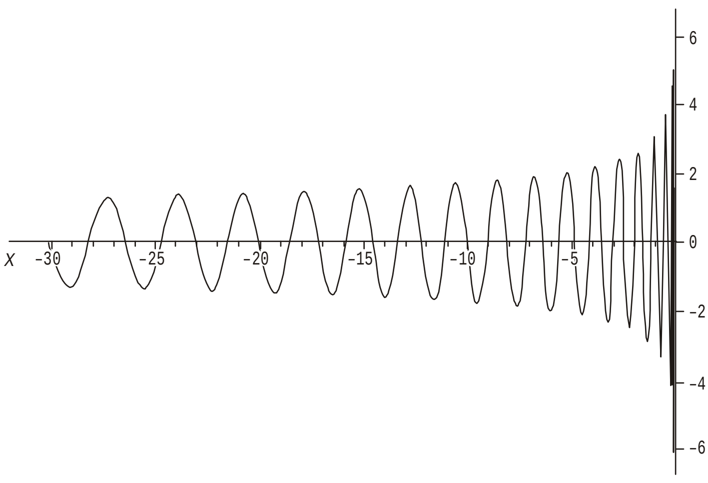
$$f(\tau_0)=\pm i\operatorname{arctg}\frac{2\sqrt{\chi(1-\chi)}}{1-2\chi}, \quad f''(\tau_0)=\frac{2\chi^{3/2}}{\sqrt{1-\chi}},$$
$$\varphi(\tau_0)=\chi^{1/2}\exp\left(\pm i\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{1-\chi}{\chi}}\right), \tag{16}$$

подставив которые в (15), получим оценку для функции ϕ в области $1/2<\chi<1$ в виде

$$\phi\sim c_0\left(\frac{1-\chi}{\chi}\right)^{1/4}\left[\exp(i\gamma)+\exp(-i\gamma)\right]\exp\left[i\left(\kappa\frac{z}{H}+\omega t\right)\right], \tag{17}$$

где $\gamma=\lambda\cdot\operatorname{arctg}\dfrac{2\sqrt{\chi(1-\chi)}}{1-2\chi}$, причем здесь не учтены не содержащие множитель λ экспоненты как несущественные для окончательного результата. В области $\chi<1/2$ оценка имеет аналогичный вид, но с измененным аргументом комплексной постоянной c_0.

Вариации функции тока $\psi=\partial\phi/\partial x$ в зависимости от x при фиксированном z и t показаны на рисунке, где можно видеть, что вдоль оси x образуется стоячая волна, формирующаяся из падающей и отраженной волн. С приближением к точке, в которой $\omega=\omega_b(x)$, амплитуда волны нарастает пропорционально $\left(\chi/(1-\chi)\right)^{1/4}$, а локальная длина волны уменьшается. При этом по оси z имеет место бегущая волна с волновым числом κ.



Вариации функции тока $\psi=\partial\phi/\partial x$ в зависимости от x при фиксированных z и t

Заключение

Проведенный анализ позволяет сделать следующие выводы. В линейной задаче структура внутренних гравитационных волн в атмосферном слое демонстрирует отражение, возрастание амплитуды и уменьшение длины волны вдоль направления, в котором происходит уменьшение частоты Брента–Вяйсяля. Такая тенденция может приводить к разрушению волны в окрестности точки $\omega=\omega_b(x)$ и, соответственно, к генерации турбулентности.

В результате, во-первых, меняется характер распространения рассматриваемых волн – появляется эффективный механизм перекачки энергии в область малых масштабов, и волны без существенного изменения высоты попадают в режим нелинейной динамики. Во-вторых, изменяются условия генерации неоднородностей верхней атмосферы по сравнению со случаем распространения квазисинусоидальных волн. В частности, в области изменения волновой динамики усиливается взаимодействие термосферы с ионосферой, что может проявляться в виде пятнистой структуры возмущений параметров верхней атмосферы (появление “горячих” пятен, изрезанность вертикальной структуры полей и т.д.).

Настоящая работа выполнена при поддержке Российского научного фонда (грант № 14-27-00134).

Литература

Бадулин С.И., Цимринг Л.Ш., Шрира В.А. Захват и вертикальная фокусировка внутренних волн в пикноклине горизонтальными неоднородностями стратификации и течений // Докл. АН СССР. 1983. Т. 273, № 2. С.459.

Бейтман Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. Т. 1. М.: Наука, 1965. 294 с.

Госсард Э., Хук У. Волны в атмосфере. М.: Мир, 1978. 532 с.

Ерохин Н.С., Сагдеев Р.З. К теории аномальной фокусировки внутренних волн в двумерно-неоднородной жидкости. 1. Стационарная задача // Морск. гидрофиз. журн. 1985а. № 2. С.15.

Ерохин Н.С., Сагдеев Р.З. К теории аномальной фокусировки внутренних волн в двумерно-неоднородной жидкости. 2. Точное решение двумерной задачи с учетом вязкости и нестационарности // Морск. гидрофиз. журн. 1985б. № 4. С.3.

Ерохин Н.С., Некрасов А.К., Шалимов С.Л. Коллапс внутренних гравитационных волн в двумерно-неоднородной атмосфере // Геомагнетизм и аэрономия. 1994. Т. 34, № 6. С.150–160.

Лаврентьев М.А., Шабат Б.А. Методы теории функций комплексного переменного. М.: Наука, 1965. 716 с.

Некрасов А.К., Шалимов С.Л. Нелинейные структуры внутренних гравитационных волн и их влияние на ионосферу // Космические исследования. 2002. Т. 40, № 5. С.555–558.

Самодуров А.С. Внутренние волны в среде с меняющейся по горизонтали частотой Брента-Вяйсяля // Изв. АН СССР. Сер. Физика атмосферы и океана. 1974. Т. 10, № 3. С.306–310.

Эккарт К. Гидродинамика океана и атмосферы. М.: ИЛ, 1963. 327 с.

Badulin S.I., Shrira V.I., Tsimring L.Sh. The trapping and vertical focusing of internal waves in a pycnocline due to the horizontal inhomogeneities of density and currents // J. Fluid Mech. 1985. N 158. P.199–218.

Nekrasov A.K., Erokhin N.S. Self-influence of the collapsing internal gravity wave in the inhomogeneous atmosphere // Physics Letters A. 2005. V. 335. P.417–423.

Сведения об авторе

ШАЛИМОВ Сергей Львович – доктор физико-математических наук, заведующий лабораторией, Институт физики Земли им. О.Ю. Шмидта РАН. 123242, Москва, ул. Большая Грузинская, д. 10, стр. 1. Тел.: +7(499) 254-91-15. E-mail: pmsk7@mail.ru

ON ATMOSPHERIC GRAVITY WAVES IN HORIZONTALLY INHOMOGENEOUS STRATIFIED MEDIUM

S.L. Shalimov

Schmidt Institute of Physics of the Earth, Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia

Abstract. The atmospheric gravity waves in horizontally inhomogeneous stratified medium are studied assuming the dependence of the Brunt–Vaisala frequency on the horizontal coordinate. In linear approximation, it is shown that structure of these waves demonstrates the reflection, the amplitude growth, and the wavelength decrease along the direction of the Brunt–Vaisala frequency $\omega_b(x)$ decrease in the vertically limited atmospheric layer. This tendency may result in the destruction of the wave in the vicinity of $\omega=\omega_b(x)$ and in generation of turbulence.

Keywords: atmospheric gravity waves, inhomogeneous medium.

References

Badulin S.I., Tsimring L.Sh., and Shrira V.A. The trapping and vertical focusing of internal waves in a pycnocline due to the horizontal inhomogeneities of density and currents, *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 1983, vol. 273, no. 2, pp. 459.

Badulin S.I., Shrira V.I., and Tsimring L.Sh. The trapping and vertical focusing of internal waves in a pycnocline due to the horizontal inhomogeneities of density and currents, *J. Fluid Mech*., 1985, no. 158, pp.199-218.

Bateman G. and Erdelyi A. *Higher Transcendental Functions*. New York: MC Graw-Hill, 1953.

Eckart C. *Hydrodynamics of ocean and atmospheres*, Pergamon Press, Oxford, 1960.

Erokhin N.S. and Sagdeev R.Z. Theory of anomalous focusing of internal waves in two-dimensional inhomogeneous fluid. 1. Steady-state problem, *Morskoi Gidrophysicheskii journal* (Marine Hydrophysical Journal), 1985a, no. 2, pp. 15.

Erokhin N.S. and Sagdeev R.Z. Theory of anomalous focusing of internal waves in two-dimensional inhomogeneous fluid. 2. Exact solution of the two-dimensional problem accounting for viscosity and non steady state, *Morskoi Gidrophysicheskii journal* (Marine Hydrophysical Journal), 1985b, no. 4, pp. 3.

Erokhin N.S., Nekrasov A.K., and Shalimov S.L. Collapse of internal gravity waves in two-dimentional inhomogeneous atmosphere, *Geomagn. Aeron*., 1994, vol. 34, no. 6, pp.150-160.

Gossard E. and Hooke W. *Waves in the Atmosphere*. Amsterdam: Elsevier Publ., 1975.

Lavrentiev M.A. and Shabat B.A. *Metody teorii funktsii kompleksnogo peremennogo* (Methods of complex variable theory). Moscow: Nauka. 1965.

Nekrasov A.K. and Erokhin N.S. Self-influence of the collapsing internal gravity wave in the inhomogeneous atmosphere, *Physics Letters A*, 2005, vol. 335, pp. 417-423.

Nekrasov A.K. and Shalimov S.L. Nonlinear Structures of Internal Gravitational Waves and Their Effect on the Ionosphere, *Cosmic Research*, 2002, vol. 40, no. 5, pp. 517-520.

Samodurov A.S. Internal waves in the medium with horizontally variable Brunt–Vaisala frequency, *Izv., Atmos. Ocean. Phis.,* 1974, vol. 10, no. 3, pp. 306-310.