ФИЗИКА
ЗЕМЛИ
№ 2 · 1987

УДК 530.344.094.4

В. Ю. БУРМИН

АППРОКСИМАЦИЯ СИСТЕМЫ ГОДОГРАФОВ РЕФРАГИРОВАННЫХ ВОЛН ЧАСТИЧНЫМИ СПЛАЙНАМИ

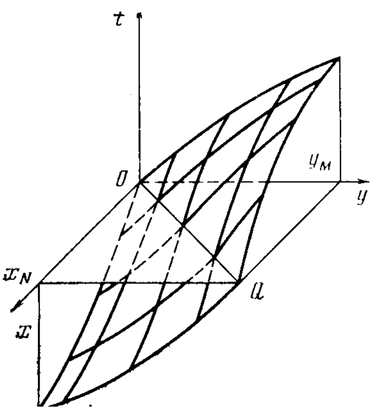
1. Задачу определения скорости распространения сейсмических волн как функции переменных x и z по наблюденной на поверхности Земли системе годографов рефрагированных волн можно отнести к наиболее актуальным задачам геометрической сейсмики. Предлагаемая статья посвящена одному из аспектов этой задачи, а именно требованиям, которым должны удовлетворять исходные данные.

Пусть скорость распространения сейсмических волн в среде зависит от координат x и z, т. е. $v=v(x, z)$. На поверхности Земли на профиле наблюдений, определяемом координатами $(0, X)$ в точках x_i $(i=1, \ldots, N)$, возбуждаются упругие колебания, а в точках с координатами x_j $(j=1, \ldots, M)$ осуществляется регистрация этих колебаний, в результате чего получается система встречных и нагоняющих годографов. Характер каждого годографа системы (время прихода волны на данном расстоянии и наклон годографа) будет определяться распределением скорости распространения сейсмических волн в среде. Рассматривая произвольную совокупность упругих сред и соответствующую им совокупность годографов, можно сказать, что описанный эксперимент задает отображение множества скоростных функций U на множество годографов $F(U\to F)$. Последнее можно записать в операторной форме

$$Au=f, \tag{1}$$

где A — оператор, осуществляющий отображение множества U на множество F, а u и f — соответственно элементы этих множеств $(u\in U,\ f\in F)$. Тогда решение задачи заключается в определении обратного отображения $F\to U$ или $u=A^{-1}f$, где A^{-1} — оператор, обратный A. В общем случае отображение $U\to F$ не является взаимно однозначным, например для сред с волноводами, и, следовательно, обратное отображение не является непрерывным. Вопрос единственности решения задачи для произвольных скоростных функций $v(x, z)$ до настоящего времени остается открытым. Тем не менее для некоторых классов скоростных функций, например функций, логарифмы которых являются гармоническими функциями [1, 2], и функций с разделяющимися переменными при отсутствии волноводов [3, 4], решение обратной задачи существует и единственно. При этом, конечно, предполагается, что правая часть уравнения (1) принадлежит образу AU множества U. Однако, как правило, погрешности в определении правой части уравнения (1) выводят элемент f за пределы множества AU и, следовательно, выражение $u=A^{-1}\tilde{f}$ теряет смысл. Здесь $\tilde{f}=f+\delta f$, а δf — погрешность в определении f. В связи с этим желательно было бы иметь определенные критерии, позволяющие устанавливать принадлежность элемента f множеству AU. Это позволило бы построить проекцию $\tilde{f}$ на множество AU и искать решение задачи в виде $u=A^{-1}P\tilde{f}=A^{-1}f$, где P — оператор проектирования.

2. Рассмотрим систему годографов рефрагированных волн. Пусть скоростная функция $v(x, z)$ такова, что сейсмические лучи, выходящие из одного источника под разными углами, не пересекаются ни в одной точке среды. Очевидно, это требование эквивалентно требованию отсутствия каустик и скачков скорости в среде. Кроме того, будем считать, что в среде отсутствуют волноводы. Каждый годограф системы, соответствующий такой среде, будет непрерывной однозначной функцией. Представим системы годографов в виде поверхности $t(x, y)$, определенной на треугольнике $0Qy_M$ (см. рисунок). Образующими этой поверхности являются годографы исходной системы. При таком представлении поверхность годографа рефрагированных волн $t(x, y)$ должна удовлетворять следующим требованиям: а) функция $t(x, y)$ — неотрицательная функция; б) $t(x, y)$ — непрерывная функция координат в каждой точке треугольника $0Qy_M$. Это требование является следствием того факта, что исходная система годографов должна быть увязанной во взаимных точках согласно принципу взаимности источника и приемника; в) частные производные $t(x, y)$ должны быть с разными знаками $\left(\frac{\partial t}{\partial x}<0,\ \frac{\partial t}{\partial y}>0\right)$; г) смешанные производные $t(x, y)$ — неотрицательные функции $\left(\frac{\partial^2 t}{\partial x\,\partial y}=\frac{\partial^2 t}{\partial y\,\partial x}\geqslant 0\right)$. Иначе говоря, при каждом фиксированном значении одной из координат значение кажущейся скорости от годографа к годографу по другой координате не должно уменьшаться при увеличении времени t. Последние требования вытекают из того факта, что чем больше эпицентральное расстояние от источника до приемника, тем больше угол выхода луча на дневную поверхность в одной и той же точке приема.



Таким образом, если построить некоторую функцию $T(x, y)$, обладающую указанными выше свойствами и достаточно близкую к экспериментальному годографу $t(x, y)$, то следует ожидать, что $T(x, y)$ будет принадлежать множеству AU, т. е. будет проекцией на AU.

3. Перейдем к определению такой функции. Сделаем одно предположение относительно системы экспериментальных годографов рефрагированных волн. Будем считать, что источники и приемники размещаются в одних и тех же точках (так что $N=M$). Это означает, что каждой точке экспериментального годографа соответствует взаимная точка. Систему годографов рефрагированных волн, отвечающую указанному требованию, будем называть полной системой годографов. Отсюда следует, что поверхность годографа $t(x, y)$, натянутая на экспериментальные годографы как на образующие, задана на всем треугольнике $0Qy_M$ $(N=M)$, включая границу.

Доопределим функцию $\varphi(x, y)=t(x, y)$, заданную в треугольнике $0y_MQ$ $(y\geqslant x)$, на треугольнике $0x_NQ$, для которого $y<x$, следующим образом (рисунок):

$$\varphi(x, y)=-t(y, x).$$

Значения функции $\varphi(x, y)$ заданы на квадратной сетке $\Delta=\Delta_x\times\Delta_y$, где $\Delta_x: 0=x_0<x_1<\ldots<x_N$; $\Delta_y: 0=y_0<y_1<\ldots<y_M$, причем $x_i=y_j$ при $i=j$.

Будем решать задачу определения функции $T(x, y)$, обладающую свойствами а)—г), с помощью двумерных кубических сплайнов. Предположим, что такая сплайн-функция существует. Тогда имеет место система линейных уравнений [5]

$$(1-\lambda_i)T^x_{i-1j}+2T^x_{ij}+\lambda_i T^x_{i+1j}=\psi_{ij}, \tag{2}$$

где

$$\psi_{ij}=3\left[-\frac{1-\lambda_i}{h_{i-1}}T_{i-1j}+\left(\frac{\lambda_i}{h_{i-1}}-\frac{1-\lambda_i}{h_i}\right)T_{ij}+\frac{\lambda_i}{h_i}T_{i+1j}\right];$$

$$h_i = x_{i+1} - x_i; \qquad \lambda_i = \frac{h_{i-1}}{h_i + h_{i-1}}; \qquad T^x = \frac{\partial T}{\partial x}.$$

Уравнение (2) связывает значения первых производных по x частичного кубического сплайна в узлах сетки Δ_x со значениями самого сплайна и является условием непрерывности сплайна $T(x, y)$ по x и его производной $T^x(x, y)$ [5].

Напомним, что сплайн $T[\varphi(x, y); x]$ называется частичным, если он представляет собой кубический сплайн для функции $\varphi(x, y)$ на сетке Δ_x, а y играет роль параметра. Аналогичным образом определяется частичный сплайн $T[\varphi(x, y); y]$ на сетке Δ_y. Подробнее о частичных сплайнах см. [5, 6].

Для системы (2), состоящей из $N-1$ уравнений и определяющей $N+1$ неизвестных параметров, необходимо доопределить два недостающих параметра. С этой целью зададим два граничных условия [5]:

$$\begin{aligned} \psi_{0j} &= 2T_{0j}^x + T_{1j}^x = 3\,\frac{\varphi(x_1, y_j) - \varphi(x_0, y_j)}{h_0}, \\ \psi_{Nj} &= 2T_{Nj}^x + T_{N-1j}^x = 3\,\frac{\varphi(x_N, y_j) - \varphi(x_{N-1}, y_j)}{h_{N-1}}. \end{aligned} \tag{3}$$

Всего будем иметь $2(N+1)$ граничных условий, определяемых соотношениями (3). Учитывая введенные граничные условия, перепишем систему (2):

$$\begin{gathered} \frac{3+\lambda_1}{2} T_{1j}^x + \lambda_1 T_{2j}^x = \psi_{1j} - \frac{1-\lambda_1}{2}\psi_{0j}, \\ (1-\lambda_2) T_{1j}^x + 2T_{2j}^x + \lambda_2 T_{3j}^x = \psi_{2j}, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ (1-\lambda_{N-2}) T_{N-3j}^x + 2T_{N-2j}^x + \lambda_{N-2} T_{N-1j}^x = \psi_{N-2j}, \\ (1-\lambda_{N-1}) T_{N-2j}^x + \frac{4-\lambda_{N-1}}{2} T_{N-1j}^x = \psi_{N-1j} - \frac{\lambda_{N-1}}{2}\psi_{Nj}. \end{gathered} \tag{4}$$

Решение системы (4) запишется в виде

$$T_{ij}^x = \sum_{k=1}^{N-1} m_{ik}\psi_{kj} - \frac{1}{2} m_{i1}(1-\lambda_1)\psi_{0j} - \frac{1}{2} m_{iN-1}\lambda_{N-1}\psi_{Nj}, \tag{5}$$

где m_{ik} — элементы обратной матрицы для системы (4). Записывая решение (5) в развернутом виде, будем иметь

$$\begin{aligned} T_{ij}^x &= 3\sum_{k=1}^{N-1} m_{ik}\left[-\frac{1-\lambda_k}{h_{k-1}} T_{k-1j} + \left(\frac{\lambda_k}{h_{k-1}} - \frac{1-\lambda_k}{h_k}\right) T_{kj} + \frac{\lambda_k}{h_k} T_{k+1j}\right] - \\ &\quad - \frac{1}{2} m_{i1}(1-\lambda_1)\psi_{0j} - \frac{1}{2} m_{iN-1}\lambda_{N-1}\psi_{Nj} = \\ &= 3\sum_{k=0}^{N}\left[m_{ik-1}\frac{\lambda_{k-1}}{h_{k-1}} + m_{ik}\left(\frac{\lambda_k}{h_{k-1}} - \frac{1-\lambda_k}{h_k}\right) - m_{ik+1}\frac{1-\lambda_{k+1}}{h_k}\right] T_{kj} - \\ &\quad - \frac{1}{2} m_{ij}(1-\lambda_1)\psi_{0j} - \frac{1}{2} m_{iN-1}\lambda_{N-1}\psi_{Nj}. \end{aligned}$$

Здесь $m_{i(-1)} = m_{i0} = m_{iN} = m_{iN+1} = 0$. Положим

$$a_{ik} = 3\left[m_{ik-1}\frac{\lambda_{k-1}}{h_{k-1}} + m_{ik}\left(\frac{\lambda_k}{h_{k-1}} - \frac{1-\lambda_k}{h_k}\right) - m_{ik+1}\frac{1-\lambda_{k-1}}{h_k}\right];$$

$$\psi_{ij}^* = -\frac{1}{2}[m_{i1}(1-\lambda_1)\psi_{0j} + m_{iN-1}\lambda_{N-1}\psi_{Nj}],$$

тогда окончательно можно записать

$$T_{ij}^x = \sum_{k=0}^{N} a_{ik} T_{kj} + \psi_{ij}^*. \tag{6}$$

Решение (6) вместе с граничными условиями (3) определяет значения первых производных по координате x частичных сплайнов в узлах сетки $\Delta = \Delta_x \times \Delta_y$.

Запишем аналогичным образом систему линейных уравнений, определяющих интерполяционные сплайны $T^x(x, y)$, но уже при фиксированных значениях x. В результате будем иметь

$$(1-\lambda_j) T_{ij-1}^{xy} + 2T_{ij}^{xy} + \lambda_j T_{ij+1}^{xy} = \theta_{ij}, \tag{7}$$

где

$$\theta_{ij} = 3\left[-\frac{1-\lambda_j}{h_{j-1}} T_{ij-1}^{x} + \left(\frac{\lambda_j}{h_{j-1}} - \frac{1-\lambda_j}{h_j}\right) T_{ij}^x + \frac{\lambda_j}{h_j} T_{ij+1}^{x}\right];$$

$$h_j = y_{j+1} - y_j; \qquad \lambda_j = \frac{h_{j-1}}{h_j + h_{j-1}}; \qquad T^{xy} = \frac{\partial^2 T}{\partial x\, \partial y}.$$

Уравнения (7) являются условиями непрерывности сплайна $T(x, y)$ и его производной $T^{xy}(x, y)$ по координате y.

Далее, вводя граничные условия

$$T_{i0}^{xy} = T_{iN}^{xy} = 0 \tag{8}$$

и проводя соответствующие преобразования, получим

$$T_{ij}^{xy} = \sum_{l=0}^{N} b_{lj} T_{il}^x, \tag{9}$$

где

$$b_{lj} = 3\left[n_{l-1j}\frac{\lambda_{l-1}}{h_{l-1}} + n_{lj}\left(\frac{\lambda_l}{h_{l-1}} - \frac{1-\lambda_l}{h_l}\right) - n_{l+1j}\frac{1-\lambda_{l-1}}{h_l}\right],$$

а n_{lj} — элементы обратной матрицы системы (7).

Подставим (6) в (9). Тогда

$$T_{ij}^{xy} = \sum_{l=0}^{N} b_{jl}\left(\sum_{k=0}^{N} a_{ik} T_{kl} + \psi_{il}^*\right)$$

и

$$T_{ij}^{xy} = \sum_{l=0}^{N}\sum_{k=0}^{N} \mu_{ijlk} T_{kl} + c_{ij}, \tag{10}$$

где

$$\mu_{ijlk} = b_{jl} a_{ik}; \qquad c_{ij} = \sum_{l=0}^{N} b_{jl} \psi_{il}^*.$$

Уравнение (10) определяет смешанные производные от интерполяционного сплайна $T(x, y)$ в узлах сетки $\Delta = \Delta_x \times \Delta_y$.

4. Если подчиним функцию $T(x, y)$ и ее смешанные производные $T^{xy}(x, y)$ соответствующим условиям, то $T(x, y)$ будет решением поставленной задачи.

Потребуем, чтобы удовлетворяющая системе (2) сплайн-функция $T(x, y)$ имела минимальное среднеквадратичное отклонение от экспериментального годографа в узлах сетки $\Delta=\Delta_x\times\Delta_y$, т. е. чтобы функционал

$$S=\sum_{i=0}^{N}\sum_{j=0}^{N}(T_{ij}-\varphi_{ij})^2 \tag{11}$$

имел минимальное значение.

Из требования равенства времен годографов во взаимных точках

$$T_{ij}+T_{ji}=0. \tag{12}$$

И наконец, положим

$$\delta_{ij}=\begin{cases}1, & \text{если } \varphi_{ij}\geqslant 0,\\ -1, & \text{если } \varphi_{ij}<0.\end{cases}$$

Тогда смешанные производные T_{ij}^{xy}, согласно требованию неотрицательности смешанных производных годографа, должны удовлетворять условиям

$$\delta_{ij}T_{ij}^{xy}\geqslant 0. \tag{13}$$

Таким образом, чтобы определить функцию, являющуюся годографом для некоторой скоростной функции $v(x, z)$ и достаточно близкую к экспериментальному годографу, необходимо решить задачу квадратичного программирования: минимизировать функционал (11) при ограничениях (12), (13).

Приведем выражения (11)–(13) к каноническому виду. Для этого перейдем к сквозной нумерации точек, положив

$$k=(i+1)+j(N+1), \quad M=(N+1)^2, \quad m=(j+1)+i(N+1).$$

Тогда

$$S=\sum_{k=1}^{M}(T_k-\varphi_k)^2=\sum_{k=1}^{M}T_k^2-2\sum_{k=1}^{M}T_k\varphi_k+\sum_{k=1}^{M}\varphi_k^2=S^*+\sum_{k=1}^{M}\varphi_k^2=\min,$$

$$T_k+T_m=0, \qquad \delta_kT_k^{xy}=\delta_k\left[\sum_{l=1}^{M}\mu_{kl}T_l+b_k\right]\geqslant 0.$$

Или

$$S^*=\sum_{k=1}^{M}T_k^2-2\sum_{k=1}^{M}T_k\varphi_k=\min, \qquad T_k+T_m=0, \tag{14}$$

$$\delta_k\sum_{l=1}^{M}\mu_{kl}T_l\geqslant-\delta_kb_k. \tag{15}$$

Решение задачи (14), (15) можно проводить стандартными методами (см., например, [7]).

Автор выражает признательность Т. Б. Яновской и М. Е. Романову за обсуждение работы и ряд полезных замечаний.

Литература

1. *Облогина Т. И.* Об одной обратной задаче геометрической сейсмики неоднородных сред // Изв. АН СССР. Физика Земли. 1965. № 5. С. 7–11.
2. *Облогина Т. И., Пийп В. Б., Юдасин Л. А.* Неоднородные среды с гармоническими полями скоростей сейсмических волн // Изв. АН СССР. Физика Земли. 1973. № 3. С. 101–108.
3. *Бейлькин Г. Я.* Явное решение обратной кинематической задачи в негерглотцевом случае // Математические вопросы распространения волн. Вып. 9. Л.: Наука, 1978. С. 20–29.
4. *Аниконов Ю. Е.* Несколько частных решений обратной кинематической задачи // Мат. проблемы геофизики. 1973. Вып. 4. С. 30–60.
5. *Алберг Дж., Нилсон Э., Уолш Дж.* Теория сплайнов и ее приложения. М.: Мир, 1972. С. 229–232.
6. *Завьялов Ю. С., Квасов Б. И., Мирошниченко В. Л.* Методы сплайнов функций. М.: Наука. 1980. С. 75–80.
7. *Хедли Дж.* Нелинейное и динамическое программирование. М.: Мир, 1967. С. 220–253.

Академия наук СССР
Институт физики Земли
им. О. Ю. Шмидта

Поступила в редакцию
5.II.1982