ФИЗИКА
ЗЕМЛИ
№ 2 · 1980

УДК 550.340.1

В. Ю. БУРМИН

АППРОКСИМАЦИЯ СЕЙСМИЧЕСКОГО ГОДОГРАФА ВЫПУКЛЫМИ СПЛАЙНАМИ

В настоящее время, несмотря на все более широкое развитие представлений о строении земной коры и мантии как о существенно неоднородных средах, еще широко распространено определение скоростных характеристик среды по сейсмическим данным в рамках так называемых одномерных моделей сред, т. е. сред, в которых скорость распространения упругих волн является функцией только одной координаты, обычно глубины или радиуса Земли. Методы решения задачи определения скоростного разреза по годографу сейсмической волны для одномерных моделей сред развиты достаточно полно и основываются большей частью на формулах обращения сейсмического годографа [1, 2]. Однако далеко не для всякого экспериментального годографа можно определить скоростную функцию по формулам обращения. Для этого необходимо, чтобы годограф обладал определенными свойствами и, в частности, свойством выпуклости. В настоящей работе строится аппроксимирующая сплайн-функция, приводящая произвольный экспериментальный годограф к виду, необходимому для применения формул обращения.

§ 1. ГОДОГРАФ СЕЙСМИЧЕСКОЙ ВОЛНЫ, РАСПРОСТРАНЯЮЩЕЙСЯ В ВЕРТИКАЛЬНО-НЕОДНОРОДНЫХ СРЕДАХ, И ВЫПУКЛЫЕ КУБИЧЕСКИЕ СПЛАЙНЫ

Запишем уравнение сейсмического годографа в виде

$$x(H)=2\int_0^H \frac{p\,dz}{\sqrt{n^2(z)-p^2}}, \qquad t(H)=2\int_0^H \frac{n^2(z)\,dz}{\sqrt{n^2(z)-p^2}}.$$

В этих уравнениях параметр p равен производной от годографа в точке $x(H)$, т. е. $p=dt/dx(H)$, а $n(z)=1/v(z)$; $x(H)$ соответствует точке выхода сейсмического луча, погрузившегося на глубину H, на дневную поверхность. Для рефрагированных волн $dt/dx(H)=1/v(H)$ и непрерывность годографа сохраняется только при непрерывном монотонном увеличении скорости с глубиной. Следовательно, для годографа должно выполняться неравенство $dt/dx(z)\geqslant dt/dx(H)$ для всех $z\leqslant H$ (условие монотонности первой производной от годографа). Это условие может быть записано в терминах второй производной в виде $d^2t/dx^2\leqslant 0$. Приведенные рассуждения справедливы и для петель возврата. В этом случае следует только учитывать, что начало ветви возврата соответствует большим значениям x и t. Для годографа отраженных волн справедливо неравенство $d^2t/dx^2>0$. Таким образом, при решении обратных кинематических задач сейсмики для осесимметричных одномерных сред экспериментальный годограф должен удовлетворять условию выпуклости: вверх, если годограф соответствует рефрагированным волнам, и вниз, если годограф соответствует отраженным волнам.

Однако экспериментальные годографы практически никогда не удовлетворяют этим требованиям. Прежде всего это обстоятельство связано с тем, что реальные среды неоднородны не только по глубине, но и в горизонтальных направлениях. Поэтому годографы сейсмических волн, распространяющихся в реальных средах, могут не удовлетворять условию выпуклости. Кроме этого, всякий экспериментальный годограф искажен случайными погрешностями, связанными с выделением определенных типов волн и с измерением наблюденных величин – времени прихода сейсмических волн и эпицентрального расстояния, и даже в случае однородной в горизонтальных направлениях среды не будет являться выпуклой функцией. Следовательно, прежде чем определять скоростную функцию $v(z)$ по формулам обращения, необходимо провести сглаживание экспериментального годографа $\tilde{t}=\tilde{t}(x)$ некоторой выпуклой (вогнутой) кривой $T(x)$, которая в заданной норме менее всего уклонялась бы от экспериментального годографа.

Будем строить сглаживающую функцию с помощью кубических сплайнов. Кубическим сплайном называется функция, которая склеена из различных кусков кубической параболы. Кубический сплайн непрерывен и имеет непрерывные первую и вторую производные, а третья производная может претерпевать в точках соединения разрыв с конечным скачком [3, 4]. Приближенное представление функций с помощью сплайнов имеет определенное преимущество перед представлением функций многочленами. Одним из недостатков многочленов как аппарата для представления функций является то, что их поведение в окрестности какой-либо точки определяет их поведение в целом. Сплайны свободны от этого недостатка. Помимо этого, сплайны обладают такими важными свойствами, как свойства наилучшего приближения и минимальной кривизны или минимальной нормы [3].

Формулы обращения сейсмического годографа позволяют определять глубину максимального погружения сейсмического луча, которой приписывается определенная скорость распространения сейсмических волн. Эта скорость, как уже отмечалось, определяется как обратная величина к производной от годографа в соответствующей точке годографа. Задача дифференцирования экспериментальной функции $\hat{t}=\hat{t}(x)$ является некорректной задачей. Особую трудность представляет вычисление производных в начальных и предельных точках годографа, которые играют первостепенную роль в определении параметров отдельных слоев среды. Сплайны позволяют достаточно эффективно решать эту задачу.

Рассмотрим задачу сглаживания. Пусть в некоторой точке оси x помещен источник упругих волн, распространяющихся в нижней полуплоскости упругой среды с одномерным законом изменения скорости $v(z)$. В точках наблюдений x_i $(i=1, 2, \ldots, n)$ оси x определяются значения $t_i=t(x_i)$ годографа сейсмической волны $t=t(x)$. Предположим, что значения x_i известны точно, а вместо значений t_i – их приближения $\hat{t}_i=\hat{t}(x_i)$, имеющие отклонения от истинных значений $\delta t_i=\hat{t}_i-t_i$. Такое предположение правомерно, так как погрешности в определении x_i могут быть отнесены к погрешностям в определении t_i. Для того чтобы убедиться в этом, достаточно разложить функцию $t(x)$ в окрестности точки x_i в ряд Тейлора. Тогда будем иметь

$$t(x)=t(x_i)+t'(x_i)\cdot(x-x_i)+\ldots\ .$$

Если вместо x подставить $x_i+\delta x_i$, то получим

$$t(x_i+\delta x_i)=t(x_i)+t'(x_i)\delta x_i+\ldots= \\ =t_i+\delta t_i=\tilde{t}_i.$$

Здесь $\delta t_i=t'(x_i)\delta x_i+\ldots$. При этом $\tilde{t}(x)$ уже не является выпуклой функцией. Требуется по приближенным значениям годографа $\tilde{t}_i$, заданного на сетке

$$\Delta: a=x_0<x_1<\ldots<x_N=b,$$

построить кубический сплайн, обращенный выпуклостью вверх, если рассматривается годограф преломленных волн, и выпуклостью вниз, если рассматривается годограф отраженных волн, наилучшим образом аппроксимирующий экспериментальный годограф в евклидовой норме.

Предположим, что такой сплайн $T(x)$ существует. Тогда, записывая систему линейных уравнений, определяющую вторые производные интерполяционного сплайна для самого себя через значения сплайна в узлах интерполяции, будем иметь [3]

$$h_{i-1}T''_{i-1}+2(h_{i-1}+h_i)T_i''+h_iT''_{i+1}=6\left(\frac{T_{i+1}-T_i}{h_i}-\frac{T_i-T_{i-1}}{h_{i-1}}\right), \tag{1}$$

где $i=1, 2, \ldots, N-1$; $h_i=x_{i+1}-x_i$ и T_i'' – значение второй производной от сплайна в точке x_i. Причем в силу условия выпуклости сплайна имеем $T_i''\leqslant 0$ для преломленных волн и $T_i''>0$ для отраженных волн. Введем обозначения:

$$\lambda_i=\frac{h_{i-1}}{h_i+h_{i-1}} \quad \text{и} \quad f_i=\frac{h_ih_{i-1}}{6}[\lambda_iT''_{i-1}+2T_i''+(1-\lambda_i)T''_{i+1}].$$

Учитывая их, запишем систему линейных уравнений для определения значений сплайна в узлах

$$(1-\lambda_i)T_{i-1}-T_i+\lambda_iT_{i+1}=f_i. \tag{2}$$

Для того чтобы эта система была однозначно разрешима, необходимо задать условия, определяющие два свободных параметра. Положим $T_0=\hat{t}_0$, $T_N=\hat{t}_N$. Тогда решение системы (2) запишется в виде

$$T_i=\sum_{j=1}^{N-1}\mu_{ij}f_i-\mu_{i1}(1-\lambda_1)\tilde{t}_0-\mu_{iN-1}\lambda_{N-1}\tilde{t}_N, \tag{3}$$

где μ_{ij} – элементы обратной матрицы для системы (2).

Наша задача будет решена, если удастся построить такой сплайн, который бы доставлял минимум функционалу

$$S=\sum_{i=1}^{N-1} p_i(T_i-\tilde{t}_i)^2 \tag{4}$$

при условии $T_i''\leqslant 0$ $(T_i''>0)$. Другими словами, в качестве решения системы (1) принимаются значения T_i'', реализующие минимум функционала (4) при условиях $T_i''\leqslant 0$ в случае годографа преломленных волн и $T_i''>0$ в случае годографа отраженных волн. Здесь p_i $(p_i>0)$ – заданные числа.

§ 2. ГРАНИЧНЫЕ УСЛОВИЯ ДЛЯ АППРОКСИМИРУЮЩЕГО СПЛАЙНА

Исходная система линейных уравнений (1) определяет $N-1$ неизвестных параметров T_i''. В то же время интерполяционный кубический сплайн определяется $N+1$ параметрами. Таким образом, для решения задачи необходимо доопределить два свободных параметра. Обычно эти параметры определяются граничными условиями, накладываемыми на интерполяционный сплайн на концах. Рассмотрим граничные условия при аппроксимации сейсмического годографа.

Поскольку вторые производные от годографа обычно не бывают известными ни в одной точке годографа, то на концах годографа или соответственно в начальных и предельных точках можно положить значения вторых производных равными нулю, т. е. $T_0''=T_N''=0$. Заметим, что если скорость в среде меняется по линейному закону, то в точке $x_0=0$ $T_0''\equiv 0$. Очевидно, можно так же положить $T_0''=T_1''$ и $T_N''=T_{N-1}''$ Если $x_0=0$, то можно использовать информацию о первой производной от годографа в нуле. Для отраженных волн, как известно, $t'(0)=0$. Для преломленных волн $t'(0)=1/v(0)$, а $v(0)$ – скорость на поверхности, которая может быть определена из других наблюдений. Используя выражение для $t'(x)$, получим [3]: $t'(0)=\dfrac{\tilde{t}_1-\tilde{t}_0}{h_0}-\dfrac{h_0}{6}T_1''-\dfrac{h_0}{3}T_0''$. Отсюда

$$T_0''=3\frac{\tilde{t}_1-\tilde{t}_0}{h_0^2}-\frac{3}{h_0}t'(0)-\frac{1}{2}T_1''.$$

Для непрерывных сейсмических наблюдений, когда точки наблюдений расположены достаточно часто, можно воспользоваться какой-либо аппроксимацией производных на концах отрезка наблюдений. Например [5],

$$t'(x_0)=t(x_0,x_1)-h_0t(x,x_1,x_2)+h_0(h_0+h_1)\times t(x_0,x_1,x_2,x_3)+r_0'.$$

$$t'(x_N)=t(x_N,x_{N-1})+h_{N-1}t(x_N,x_{N-1},x_{N-2})+$$

$$+h_{N-1}(h_{N-1}+h_{N-2})t(x_N,x_{N-1},x_{N-2},x_{N-3})+r_N',$$

где $t(x_i,x_{i+1},\ldots,x_{i+j})$ – разделенная разность $(j-i)$-го порядка; r_0', r_N' – остаточные члены, которые обычно отбрасываются.

§ 3. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ЭЛЕМЕНТОВ ОБРАТНОЙ МАТРИЦЫ μ_{ij}

Запишем систему (2) в матричном виде

$$LT=F. \tag{5}$$

Здесь L – трехдиагональная матрица системы (2); $T=\{T_i\}$ – искомый вектор; $F=\{f_i\}$ – заданный вектор. Решение уравнения (5) запишется $T=MF$, где $M=L^{-1}$. Легко видеть, что элементы матрицы L зависят только от расположения узлов сетки Δ и, следовательно, элементы матрицы M также зависят только от сетки и не зависят от значений ординат в узлах сетки.

Для определения элементов матрицы M запишем систему линейных уравнений

$$\begin{cases} -\mu_{i1}+(1-\lambda_2)\mu_{i2}=0, \\ \lambda_1\mu_{i1}-\mu_{i2}+(1-\lambda_3)\mu_{i3}=0, \\ \quad\cdots \\ \lambda_{i-1}\mu_{ii-1}-\mu_{ii}+(1-\lambda_{i+1})\mu_{ii+1}=1, \\ \quad\cdots \\ \lambda_{N-2}\mu_{iN-2}-\mu_{iN-1}=0, \end{cases} \tag{6}$$

$$i=1,\ldots,N-1.$$

Эта система получается из условия $ML=E$, где E – единичная матрица. Будем решать систему (6) методом прогонки [3]. Тогда получим

$$q_k = \frac{1-\lambda_{k+1}}{1-\lambda_{k-1}q_{k-1}}, \qquad q_0 = 0, \qquad \lambda_0 = 0,$$

$$u_k = \frac{\lambda_{k-1}u_{k-1}-\delta_{ki}}{1-\lambda_{k-1}q_{k-1}}, \qquad \delta_{ki} = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad k \neq i \\ 1 & \text{при} \quad k = i \end{cases},$$

$$\mu_{iN-1} = u_{N-1}, \quad \mu_{ik} = q_k\mu_{ik+1} + u_k, \qquad k=1,\ldots,N-1.$$

Таким образом, перебирая индекс i от 1 до $N-1$, получим все значения элементов обратной матрицы M. При этом если сетка равномерная, т. е. $\lambda_k=0.5$, то процедура определения элементов матрицы M заведомо устойчива в том смысле, что ошибки вычислений затухают, так как $q_k = \frac{k}{k+1} < 1$.

§ 4. МИНИМИЗАЦИЯ ФУНКЦИОНАЛА $S(T'')$

Запишем функционал (3) в развернутом виде

$$S(T'') = \sum_{i=1}^{N-1}\left\{\sum_{j=1}^{N-1}\mu_{ij}f_j - \mu_{i1}(1-\lambda_1)\tilde{t}_0 - \mu_{iN-1}\lambda_{N-1}\tilde{t}_N - \tilde{t}_i\right\}^2 =$$

$$= \sum_{i=1}^{N-1}\left\{\frac{1}{6}\sum_{j=1}^{N-1}\mu_{ij}h_jh_{j-1}[\lambda_jT''_{j-1} + 2T_j'' + (1-\lambda_j)T''_{j+1}] -\right.$$

$$\left. - \mu_{i1}(1-\lambda_j)\tilde{t}_0 - \mu_{iN-1}\lambda_{N-1}\tilde{t}_N - \tilde{t}_i\right\}^2 =$$

$$= \sum_{i=1}^{N-1}\left\{\frac{1}{6}\sum_{j=1}^{N-1}[\mu^*_{ij+1}\lambda_{j+1} + 2\mu^*_{ij} + \mu^*_{ij-1}(1-\lambda_{j-1})]T_j'' -\right.$$

$$\left. - \mu_{i1}(1-\lambda_1)\tilde{t}_0 - \mu_{iN-1}\lambda_{N-1}\tilde{t}_N - \tilde{t}_i\right\}^2.$$

Здесь $\mu_{ij}^* = \mu_{ij}h_jh_{j-1}$ и $\mu_{i0}^* = \mu_{iN}^* = 0$, $\lambda_N = \lambda_0 = 0$, $T_0'' = T_N'' = 0$. Функционал $S(T'')$ является выпуклым по T_i'', ограниченным снизу и непрерывным на выпуклом множестве $\mathcal{T} = \{T'' \mid T_i'' \leqslant 0\}$. Следовательно, $S(T'')$ имеет единственный минимум по T''.

Сделаем подстановку $-g_i^2 = T_i''$, если рассматривается годограф преломленных волн, и $g_i^2 = T_i''$, если имеют место отраженные волны. Тогда от минимизации функционала (4) на выпуклом множестве $\mathcal{T}$ мы перейдем к минимизации без ограничений. Функционал S запишется в виде

$$S(g) = \sum_{i=1}^{N-1}\left\{\operatorname{sign}\sum_{j=1}^{N-1}\alpha_{ij}g_j - t_i^*\right\}^2, \tag{7}$$

где

$$\operatorname{sign} = \begin{cases} -1 & \text{если} \quad g_i^2 < 0 \\ 0 & \text{если} \quad g_i^2 = 0, \\ 1 & \text{если} \quad g_i^2 > 0 \end{cases}$$

$$\alpha_{ij} = \frac{1}{6}[\mu^*_{ij+1}\lambda_{j+1} + 2\mu^*_{ij} + \mu^*_{ij-1}(1-\lambda_{j-1})],$$

$$t_i^* = \mu_{i1}(1-\lambda_1)\tilde{t}_0 + \mu_{iN-1}\lambda_{N-1}\cdot\tilde{t}_N + \tilde{t}_i.$$

$$i, j = 1, 2, \ldots, N-1.$$

Если в качестве краевых условий выбраны условия $T_0'' = T_1''$ и $T_N'' = T''_{N-1}$, то следует положить

$$\alpha_{i1} = \frac{1}{6}[\mu^*_{i-1}(2+\lambda_1) + \mu^*_{i2}\lambda_2],$$

$$\alpha_{iN-1} = \frac{1}{6}[\mu^*_{iN-2}(1-\lambda_{N-2}) + \mu^*_{iN-1}(3-\lambda_{N-1})].$$

Если известна первая производная от годографа в нуле $t_0'=1/v_0$ $(t_0'=0)$, то в этом случае будет

$$\tilde{t}_i^* = \frac{1}{2}\mu_{i1}^*\lambda_1\left(\frac{1}{v_0h_0}-\frac{\tilde{t}_1-\tilde{t}_0}{h_0^2}\right)+\mu_{i1}(1-\lambda_1)\tilde{t}_0+\mu_{iN-1}\lambda_{N-1}\tilde{t}_N+\tilde{t}_i,$$

$$\alpha_{i1}=\frac{1}{6}\left[\mu_{i1}\left(2-\frac{\lambda_1}{2}\right)+\mu_{i2}\lambda_2\right].$$

Для минимизации функционала (7) воспользуемся одним из методов спуска. Будем минимизировать функционал (7) методом скорейшего спуска [6]. В соответствии со схемой метода строим минимизирующую последовательность

$$g^{k+1}=g^k-\beta_k\cdot\operatorname{grad}\left[S(g^k)\right],$$

где

$$\operatorname{grad}[S(g)]=\left\{\frac{\partial S}{\partial g_1},\ \frac{\partial S}{\partial g_2},\ldots,\ \frac{\partial S}{\partial g_{N-1}}\right\},$$

$$\frac{\partial S}{\partial g_e}=4g_e\operatorname{sign}\sum_{i=1}^{N-1}p_i\left\{\left[\operatorname{sign}\sum_{i=1}^{N-1}\alpha_{ij}g_i^2-\tilde{t}_i^*\right]\alpha_{ie}\right\}.$$

Величину β_k выбираем из условий: проверяем β_k^0. Если $S(g^k-\beta_k^0\operatorname{grad}[S(g^k)])$ убывает, берем $\beta_k^1=2\beta_k^0$ и т. д. Если $S(g^k-\beta_k^0\operatorname{grad}[S(g^k)])\geqslant S(g^k)$, шаг делим пополам и т. д.

Блок-схема программы вычисления β_k по указанной схеме приведена в (7). В качестве нулевого приближения для $(g_i^0)^2$ можно взять, например, вторую производную от квадратичной параболы, аппроксимирующей экспериментальный годограф

$$T_2=a_0+a_1(x-x_0)+a_2(x-x_0)^2,$$

$$(g_i^0)^2=T_2''=2a_2,\qquad i=1,\ 2,\ \ldots,\ N-1.$$

Итерационный процесс продолжаем до тех пор, пока разность $S_{k+1}-S_k$ не станет меньше некоторой заданной величины ε. Величина ε подбирается эмпирически, исходя из требуемой точности вычислений и времени счета.

В качестве весовых множителей p_i, как показывают численные эксперименты, целесообразно брать величины, пропорциональные абсолютным значениям вторых производных от искомого сплайна. Так, на $k+1$-м шаге поиска минимума функционала (7) можно положить $p_i^{k+1}=\frac{1}{2}\left\{(g_i^k)^2\Big/\sum_{j=0}^{N}(g_i^k)^2+p_i^k\right\}$, $p_i^0=1/(N+1)$.

§ 5. ПОСТРОЕНИЕ СПЛАЙНА $T(x)$

Как только минимум функционала S найден, т. е. определены соответствующие значения $T_i''=-g_i^2(T_i''=g_i^2)$, без труда определяются значения T_i искомого сплайна $T(x)$ в узлах сетки Δ по формулам (3). После того как определены значения T_i, можно записать искомую сплайн-функцию, аппроксимирующую экспериментальный годограф [3]:

$$T(x)=\frac{1}{6h_i}\{[(x-x_i)^3-h_i^2(x-x_i)]T_{i+1}''-[(x-x_{i+1})^3-h_i^2(x-x_{i+1})]T_i''\}+$$

$$+\frac{1}{h_i}[(x-x_i)T_{i+1}-(x-x_{i+1})T_i],$$

$$x\in[x_i,\ x_{i+1}];\qquad i=1,\ 2,\ \ldots,\ N-1.$$

Покажем, что полученный сплайн действительно является выпуклым. Запишем значение второй производной сплайна в произвольной точке отрезка $[x_{i+1},\ x_i]$. В силу линейности второй производной $T''(x)=\frac{1}{h_i}[T''(x_i)(x_{i+1}-x)+T''(x_{i+1})(x-x_i)]$.

Поскольку $T''(x_i)\leqslant 0$ $(T''(x_i)>0)$ и $(x_{i+1}-x)/h_i\geqslant 0$, $(x-x_i)/h_i\geqslant 0$, то и $T''(x)\leqslant 0$ $(T''(x)>0)$ для всех значений $x\in[x_{i+1},\ x_i]$ $(i=1,\ 2,\ldots,\ N-1)$. Это значит, что функция $T(x)$ выпуклая.

Первая производная от сплайна определяется по формулам [3]

$$T'(x)=\frac{1}{2}\left\{\left[\frac{h_i}{3}-\frac{(x_{i+1}-x)^2}{h_i}\right]T_i''-\left[\frac{h_i}{3}-\frac{(x-x_i)^2}{h_i}\right]T_{i+1}''\right\}+\frac{T_{i+1}-T_i}{h_i}.$$

Кажущиеся скорости равны величинам, обратным к значениям первых производных от сплайн-функции $T(x)$: $v^*(x)=1/T'(x)$.

§ 6. ПРИМЕР РЕАЛИЗАЦИИ АЛГОРИТМА

Рассмотренный алгоритм аппроксимации одиночного годографа выпуклой сплайн-функцией реализован в виде программы на алгоритмическом языке АЛГОЛ-60 для системы АЛГОЛ-БЭСМ6. В качестве примера приведем результаты аппроксимации выпуклой сплайн-функцией годографа первых вступлений, полученного в одном пункте наблюдений при экспедиционных работах методом ГСЗ. В таблице представлены данные параметров годографа (x, t, v^*, d^2t/dx^2) до и после аппроксимации. Среднеквадратическое отклонений аппроксимации для этих данных составляет $\delta \approx 0{,}16$ с.

Предложенный способ аппроксимации одиночных годографов позволяет эффективно использовать формулы обращения для решения обратной кинематической задачи сейсмики. Кубические сплайны оказываются при этом наиболее эффективным аппаратом для решения поставленной задачи. Действительно, если воспользоваться, например, сплайнами более высокой степени, то в этом случае уже нельзя будет гарантировать выпуклость аппроксимирующей функции на всей области аппроксимации. Последнее обстоятельство не позволяет использовать для аппроксимации одиночных годографов известные алгоритмы сглаживания функций одной переменной кубическими сплайнами, поскольку в них не делаются никакие ограничения на знак второй производной от сплайна [4].

Описанный алгоритм аппроксимации годографа справедлив при предположении о плоскопараллельном распределении скорости сейсмических волн с глубиной. Одна-

N	x	T		V *		d^2t/dx^2	
		экспериментальный	сглаженный	до сглаживания	после сглаживания	до сглаживания	после сглаживания
1	0,0	0,00	0,00	3,56	5,41	0,0000	0,0000
2	1,0	0,27	0,18	4,04	5,41	−0,0674	−0,0001
3	6,0	1,09	1,11	6,05	5,42	0,0345	−0,0001
4	11,5	2,23	2,12	5,10	5,44	−0,0243	−0,0001
5	17,1	3,13	3,15	6,43	5,45	0,0089	−0,0001
6	22,6	4,09	4,16	5,32	5,46	0,0028	−0,0001
7	28,0	5,09	5,14	5,81	5,48	−0,0086	−0,0001
8	33,0	5,99	6,06	4,61	5,49	0,0266	−0,0001
9	38,0	7,16	6,97	4,97	5,50	−0,0329	−0,0001
10	43,4	8,00	7,95	6,54	5,51	0,0151	−0,0001
11	49,4	9,08	9,04	5,30	5,52	−0,0031	−0,0001
12	54,2	9,94	9,91	5,97	5,53	−0,0058	−0,0001
13	61,6	11,12	11,24	6,07	5,54	0,0051	−0,0001
14	65,2	11,76	11,89	5,14	5,55	0,0115	−0,0001
15	70,7	12,87	12,88	5,42	5,56	−0,0152	−0,0001
16	76,2	13,73	13,87	7,06	5,57	−0,0004	−0,0001
17	81,7	14,63	14,86	4,79	5,58	0,0249	−0,0001
18	87,2	15,84	15,84	5,75	5,60	−0,0376	−0,0001
19	92,7	16,57	16,82	6,50	5,61	0,0303	−0,0001
20	98,2	17,70	17,80	4,44	5,64	−0,0043	−0,0002
21	103,7	18,90	18,78	4,64	5,67	0,0006	−0,0002
22	109,2	20,05	19,74	5,13	5,72	−0,0081	−0,0003
23	114,6	20,90	20,68	9,57	5,78	−0,0253	−0,0004
24	120,0	21,42	21,61	6,75	5,85	0,0415	−0,0005
25	125,4	22,52	22,53	4,94	5,95	−0,0214	−0,0006
26	130,7	23,43	23,41	6,00	6,07	0,0078	−0,0007
27	136,0	24,40	24,27	5,13	6,24	0,0029	−0,0010
28	142,4	25,65	25,28	5,36	6,47	−0,0056	−0,0007
29	145,1	26,11	25,69	6,87	6,53	−0,0249	−0,0004
30	147,8	26,44	26,10	9,15	6,59	−0,0019	−0,0006
31	153,2	27,04	26,91	8,34	6,78	0,0059	−0,0009
32	158,4	27,70	27,66	7,96	7,10	−0,0037	−0,0017
33	169,2	29,00	29,10	7,70	7,96	0,0045	−0,0012
34	174,6	29,65	29,76	11,22	8,25	−0,0196	−0,0004
35	180,0	30,07	30,41	9,27	8,40	0,0265	−0,0004
36	185,5	30,89	31,06	6,31	8,56	−0,0381	−0,0004
37	195,8	32,21	32,24	9,14	8,85	−0,0014	−0,0003
38	201,2	32,80	32,85	8,86	8,96	0,0027	−0,0002
39	211,8	34,04	34,02	9,01	9,12	−0,0030	−0,0001
40	217,1	34,60	34,60	9,71	9,15	0,0000	0,0000

ко в равной степени он может быть применен и к годографам, полученным для сферически-симметричных сред. Для этого достаточно от уравнения годографа на сфере перейти к уравнениям годографа на полуплоскости [8].

Академия наук СССР
Институт физики Земли
им. О. Ю. Шмидта

Поступила
20 X 1978

Литература

1. *Herglotz G.* Uber das Benndorfsche Problem der Fortpflauzung — sgeschwindigkeit der Erdbebenstrahlen. Phys. Zeitschr., *8*, 145, 1907.
2. *Чибисов С. В.* Обработка криволинейного годографа упругих волн при плоскопараллельном распределении их скоростей в упругой среде. Журн. геофизики, *4*, вып. 2, 1934.
3. *Алберг Дж., Нильсон Э., Уолш Дж.* Теория сплайнов и ее приложения. М., «Мир», 1972.
4. *Стечкин С. Б., Субботин Ю. Н.* Сплайны в вычислительной математике. М., «Наука», 1976.
5. *Жидков Н. П.* Линейные аппроксимации функционалов. Изд-во МГУ, 1977.
6. *Карманов В. Г.* Математическое программирование. М., «Наука», 1976.
7. *Сеа Ж.* Оптимизация. Теория и алгоритмы. М., «Мир», 1973.
8. *Гервер М. Л., Маркушевич В. М.* Определение по годографу скорости распространения сейсмической волны. Сб. «Вычислительная сейсмология», вып. 3. М., «Наука», 1967.