ФИЗИКА
ЗЕМЛИ
№ 5 · 1986

УДК 550.344

В. Ю. БУРМИН

ОПТИМАЛЬНОЕ РАСПОЛОЖЕНИЕ СЕЙСМИЧЕСКИХ СТАНЦИЙ ПРИ РЕГИСТРАЦИИ БЛИЗКИХ ЗЕМЛЕТРЯСЕНИЙ

На основе нестатистического подхода рассмотрена задача оптимального размещения сейсмических станций при различных исходных данных. Дано решение задачи определения оптимального гипоцентра и задачи определения оптимальной геометрии системы наблюдений для неограниченной области планирования.

Определение координат гипоцентров близких землетрясений и системы линейных алгебраических уравнений. Практический опыт и численные расчеты показывают, что точность определения параметров гипоцентров землетрясений в значительной степени зависит от взаимного расположения сейсмических станций и их положения относительно гипоцентральной зоны.

Вопрос оптимального расположения региональной сети сейсмических станций впервые был рассмотрен Н. А. Введенской в 1955 г. [1]. В работе [1] изучалась зависимость ошибок в определении координат эпицентра от азимутального створа станций при определении эпицентров землетрясений методом засечек. В дальнейшем, используя различные подходы, эту задачу рассматривали и другие авторы [2—8]. По-видимому, наиболее строгий подход при определении оптимального расположения станций в региональной сети был использован в работах [3, 6], где эта задача рассматривается в рамках представлений современной статистической теории планирования эксперимента.

В теории планирования эксперимента, базирующейся на аппарате математической статистики, наиболее полно изучены так называемые линейные непрерывные нормированные планы, т. е. такие системы наблюдений, для которых связь между величинами наблюдений w_i ($i=1, 2, \ldots, n$) и искомыми параметрами p_j ($j=1, 2, \ldots, m$) записывается в виде системы линейных уравнений

$$Kp=w, \tag{1}$$

где $w^{\text{т}}=\{w_i\}$; $p^{\text{т}}=\{p_j\}$; K — матрица системы, представляющая математическую модель изучаемой зависимости, а отношение количества измерений в каждой точке наблюдений к общему числу измерений в системе наблюдений может принимать любое значение, заключенное между 0 и 1 (подробнее о непрерывных нормированных планах см., например, в [9]).

В статистической теории оценивания оптимальные линейные оценки неизвестных параметров p определяются по методу наименьших квадратов:

$$\hat{p}=(K^{\text{т}}K)^{-1}K^{\text{т}}w$$

(буква т означает транспонирование). Ковариационная матрица таких оценок в случае, если наблюдения равноточные с дисперсиями σ_w^2, имеет вид

$$D(\hat{p})=\sigma_w^2(K^{\text{т}}K)^{-1}.$$

Об эффективности проводимого эксперимента судим по величине погрешностей оцениваемых параметров p. Параметры p являются вектор-ными величинами и, вообще говоря, точность оценок $\hat{p}$ характеризуется всеми элементами дисперсионной матрицы $D(\hat{p})$. Поэтому различные оценки для p можно сравнивать различными способами. В зависимости от способа сравнения оценок в теории планирования эксперимента рассматривают различные критерии оптимальности планов. Наиболее распространены критерии A-, E- и D-оптимальности [9].

Критерию A-оптимальности отвечают планы с минимальной средней дисперсией оценок параметров или с наименьшим значением следа ковариационной матрицы $D(\hat{p})$. E-оптимальным планам соответствует наименьшее максимальное собственное значение ковариационной матрицы. Планам, оптимальным по D-критерию, соответствует наименьший на множестве планов определитель ковариационной матрицы.

Система сейсмических станций, предназначенная для регистрации землетрясений, является типичным примером дискретного плана с единичным измерением в каждой точке. Непрерывные планы могут служить хорошим приближением дискретных планов только при большом числе измерений в каждой точке наблюдения. В нашем случае, когда число измерений в точке равно единице, нельзя использовать непосредственно результаты, полученные для непрерывных планов. Кроме этого, в традиционной теории планирования эксперимента подразумевается, что матрица исходной линейной системы уравнений задана точно, а погрешности измерений величин w_i носят только случайный характер. В сейсмическом эксперименте условие невозмущенности матрицы K выполняется не всегда, а погрешности в исходных данных имеют как случайный, так и систематический характер. Систематические погрешности связаны, например, с недостаточно полным знанием строения среды в изучаемом регионе.

В [10] был предложен нестатистический подход к планированию эксперимента, который позволяет исследовать оптимальность дискретных планов независимо от характера погрешностей (систематических или случайных) в исходных данных и при возмущенной матрице плана K. Согласно этому критерию, план считается оптимальным, если он минимизирует на множестве рассматриваемых планов обусловленность системы линейных уравнений (1) или норму матрицы, обратной к матрице плана. По сути дела, планы оптимальные по нестатистическому критерию минимизируют на множестве планов максимальную ошибку параметра p. В [10] показано, что при соответствующем выборе нормы матрицы K нестатистический критерий эквивалентен критериям A-, E- и D-оптимальности, т. е. показана непротиворечивость статистического и нестатистического подходов к задачам планирования экспериментов.

В настоящей работе на основе нестатистического подхода рассмотрена задача оптимального расположения сейсмических станций при различных исходных данных.

1. Система линейных уравнений, связывающая координаты очагов близких землетрясений и координаты регистрирующих станций. Под близкими землетрясениями обычно подразумевают землетрясения, удаленные от регистрирующих станций на расстояния порядка первых сотен километров.

Выберем декартову систему координат так, чтобы плоскость XY совпала с поверхностью Земли, а ось Z была направлена вниз. Близкими землетрясениями будем называть такие, координаты которых X, Y, H с заданной точностью удовлетворяют соотношению

$$(X-x_i)^2+(Y-y_i)^2+H^2=v_i^2(t_i-t_0)^2, \qquad (2)$$

где $i=1, 2, \ldots, n$ — номера сейсмических станций; x_i и y_i — координаты сейсмических станций; t_0 — время в очаге, t_i — время прихода волны на i-ю станцию, v_i — эффективная скорость волны вдоль прямой, соединяющей гипоцентр и i-ю станцию. В общем случае v_i являются функциями переменных X, Y, H, x_i, y_i, но в задачах, связанных с выбором оптимального расположения сейсмических станций, среду можно в первом приближении считать однородной, т. е. принимать $v_i=v=$const.

В зависимости от постановки задачи неизвестными параметрами могут быть: (А) X, Y, H; (Б) X, Y, H, v; (В) X, Y, H, t_0; (Г) X, Y, H, v, t_0. Рассмотрим эти случаи по отдельности и покажем, что все они могут быть сведены к решению линейной системы (1).

А. Введем новую переменную $\xi=X^2+Y^2+H^2$ и перенесем члены, содержащие известные величины, в правую часть, в результате чего получим

$$Xx_i+Yy_i-\frac{1}{2}\xi=w_i, \tag{3}$$

где $\quad i=1,2,\ldots,n\geqslant 3; \quad w_i=-\frac{1}{2}\left[v_i^2(t_i-t_0)^2-(x_i^2+y_i^2)\right].$

Б. Обозначим $V=v^2$. Тогда параметры X, Y, ξ, V определятся из системы линейных уравнений:

$$Xx_i+Yy_i+\frac{1}{2}V(t_i-t_0)^2-\frac{1}{2}\xi=w_i, \tag{4}$$

где $\quad i=1,2,\ldots,n\geqslant 4; \quad w_i=\frac{1}{2}(x_i^2+y_i^2).$

В. Введем переменную $\eta=X^2+Y^2+H^2-v^2t_0^2$. Относительно X, Y, η и t_0 получаем систему уравнений

$$Xx_i+Yy_i-\frac{1}{2}\eta-t_0t_iv^2=w_i, \tag{5}$$

где $i=1,2,\ldots,n\geqslant 4$; $w_i=\frac{1}{2}(x_i^2+y_i^2-v^2t_i^2)$.

Г. В этом случае вводим переменную $T=Vt_0$ и относительно X, Y, V, η, T получаем следующую систему уравнений:

$$Xx_i+Yy_i+\frac{1}{2}Vt_i^2-\frac{1}{2}\eta-Tt_i=w_i, \tag{6}$$

в которой $i=1,2,\ldots,n\geqslant 5$; $w_i=\frac{1}{2}(x_i^2+y_i^2)$.

2. Мажорантные оценки погрешностей в определении координат очагов близких землетрясений. Итак, уравнения, связывающие неизвестные параметры с координатами сейсмических станций и временами прихода волн, можно записать в виде линейной системы уравнений (1). Оценки параметров, как уже упоминалось выше, записываются в виде

$$\hat{p}=K^+w, \tag{7}$$

где $K^+=(K^{\mathrm{T}}K)^{-1}K^{\mathrm{T}}$.

Оценим погрешности в определении отдельных компонент вектора p, считая, что вектор свободных членов w и матрица заданы с отличными от нуля погрешностями. Тогда для погрешности вектора p имеем уравнение

$$\tilde{K}\Delta p=\Delta w-\Delta Kp,$$

решением которого будет вектор

$$\Delta p=\tilde{K}^+(\Delta w-\Delta Kp).$$

Решения для отдельных компонент вектора Δp запишутся

$$\Delta p_j=\tilde{k}^{(+)}(\Delta w-\Delta Kp),$$

где $\tilde{k}_j^{(+)}$ — вектор-строка матрицы K^+. Для абсолютного значения j-й компоненты вектора Δp будет иметь место неравенство

$$|\Delta p_j|=|\tilde{k}_j^{(+)}(\Delta w-\Delta Kp)|\leqslant\|\tilde{k}_j^{(+)}\|\cdot\|\Delta w-\Delta Kp\|, \tag{8}$$

которое следует из неравенства Коши — Буняковского, а $\|\cdot\|$ — евклидова норма.

Обратимся теперь к системам линейных уравнений (3)—(6). Будем считать, что ошибки как в элементах матрицы K, так и в правых частях уравнений обусловлены ошибками только времен прихода волн t_i, абсолютные значения которых можно принять равными $|\delta t_i|=\varphi_i|\Delta t|$. Весовой множитель φ_i характеризует как качество измерений на i-й станции, так и систематическую ошибку, обусловленную отклонением средней скорости v от эффективной скорости v_i на трассе между гипоцентром и i-й станцией. Как и в предыдущем параграфе, рассмотрим поочередно четыре возможных случая совокупностей искомых параметров.

А. В этом случае $\Delta K=0$, а $\Delta w_i=v_iR_i\delta t_i$, где $R_i=v_i(t_i-t_0)$ — гипоцентральное расстояние до i-й станции. Легко видеть, что

$$\|\Delta w\| \leqslant \left\{\sum_{i=1}^{n} |R_i v_i \varphi_i|^2\right\}^{1/2} |\Delta t| = \|Rv\varphi\|\cdot|\Delta t|$$

и, следовательно, оценка для $|\Delta p_j|$ будет иметь вид

$$|\Delta p_j| \leqslant \|\tilde{k}_j^{(+)}\|\cdot\|Rv\varphi\|\cdot|\Delta t|. \tag{9}$$

Б. В случае системы (4) $\Delta w=0$, а $(\Delta Kp)_i=v^2(t_i-t_0)\delta t_i=vR_i\delta t_i$, так что для $|\Delta p_j|$ опять получаем оценку (9).

В. В случае системы (5) $\Delta w_i=-v^2t_i\delta t_i$, $(\Delta Kp)_i=v^2t_0\delta t_i$ и $(\Delta w-\Delta Kp)_i=$ $=-vR_i\delta t_i$. Таким образом, и в этом случае имеет место оценка (9).

Г. В случае системы (6) $\Delta w_i=0$, а $(\Delta Kp)_i=v^2t_i\delta t_i-v^2t_0\delta t_i=vR_i\delta t_i$, и опять имеет место оценка (9).

Видно, что для всех рассмотренных вариантов евклидова норма вектора ошибки параметров удовлетворяет неравенству

$$\|\Delta p\| \leqslant \|\tilde{K}^{+}\|\cdot\|Rv\varphi\|\cdot|\Delta t|. \tag{10}$$

Отметим, что полученные оценки неулучшаемы. Это означает, что при любых фиксированных значениях параметров всегда можно подобрать знаки ошибок времен пробега на станциях так, что в (10) будет достигаться равенство. Таким образом, правая часть неравенства (10) представляет собой максимальную норму ошибки. Как уже было упомянуто во Введении, минимизация максимальной нормы ошибки эквивалентна A-, E- и D-критериям оптимальности, так что задачу об оптимальном расположении сейсмических станций можно ставить как задачу минимизации целевой функции $J=\|\tilde{K}^{+}\|\cdot\|Rv\varphi\|$.

3. Целевая функция и ее свойства при оптимальных системах наблюдений. При исследовании целевой функции J целесообразно рассмотреть экстремальные свойства отдельных сомножителей $J_1=\|\tilde{K}^{+}\|$ и $J_2=\|Rv\varphi\|$.

1. $J_1=\|\tilde{K}^{+}\|$. В [10] показано, что если K — невырожденная матрица, то для $\|K^{+}\|$ справедлива следующая двусторонняя оценка:

$$\left(\sum_{j=1}^{m}\frac{1}{\|k_j\|^2}\right)^{1/2} \leqslant \|K^{+}\| \leqslant \left(\frac{\prod\limits_{j=1}^{m}\|k_j\|^2}{\det(K^{\mathrm{T}}K)}\sum_{j=1}^{m}\frac{1}{\|k_j\|^2}\right). \tag{11}$$

При этом если векторы-столбцы матрицы K взаимно ортогональны, то $\det(K^{\mathrm{T}}K)=\prod\limits_{j=1}^{m}\|k_j\|^2$ и (11) вырождается в равенство

$$\|K^{+}\| = \left(\sum_{j=1}^{m}\frac{1}{\|k_j\|^2}\right)^{1/2}.$$

Задача минимизации $\|K^+\|$ довольно сложна, поэтому желательно иметь критерии минимальности $\|K^+\|$, связанные с экстремальными свойствами каких-то других величин.

Рассмотрим множество действительных матриц K размерности $n\times m$, удовлетворяющих условию $\|K\|^2\leqslant C$. В [10] доказана следующая теорема: определитель матрицы $K^{\mathrm{T}}K$ достигает своего максимального значения при $\|K\|^2=C$ на матрицах со взаимно ортогональными столбцами с одинаковой нормой.

Из этой теоремы и оценки (11) вытекает следствие, что минимум $\|K^+\|$ и максимум $\det(K^{\mathrm{T}}K)$ достигаются одновременно.

Ограничение $\|K\|^2\leqslant C$ связано с ограничениями, накладываемыми на область выбора координат точек наблюдений (область планирования). В некоторых случаях область планирования может отвечать более узкому множеству матриц K, например такому, которое определяется соотношениями $\|k_j\|^2\leqslant c_j$, где $\sum_{j=1}^{m} c_j=C$. В этом случае справедлива теорема [10]: определитель матрицы $K^{\mathrm{T}}K$ достигает своего максимального значения при $\|k_j\|^2=c_j$ на матрицах со взаимно ортогональными столбцами.

Таким образом, эти теоремы устанавливают свойства, которыми должны обладать матрицы K, чтобы система наблюдений была оптимальной в смысле критериев, указанных выше. Эти результаты будут использованы в дальнейшем при определении оптимальных систем регистрации близких землетрясений при различных исходных данных.

2. $J_2=\|Rv\varphi\|$. Ограничимся рассмотрением евклидовой метрики. При этом величина J_2 равна

$$\left\{\sum_{i=1}^{n}[(X-x_i)^2+(Y-y_i)^2+H^2]\,v^2\varphi_i^2\right\}^{1/2}.$$

Минимум J_2 как функции H достигается при $H=0$, так что оптимальной для площадной системы наблюдений является регистрация поверхностных источников.

Найдем минимум J_2 как функции X и Y. Точку $M(X_0,\ Y_0,\ H=0)$, соответствующую минимуму J_2, будем называть оптимальным гипоцентром. Дифференцируя J_2 по X и Y и приравнивая производные нулю, получим

$$X_0=\sum_{i=1}^{n}\varphi_i^2x_i\Big/\sum_{i=1}^{n}\varphi_i^2,\qquad Y_0=\sum_{i=1}^{n}\varphi_i^2y_i\Big/\sum_{i=1}^{n}\varphi_i^2.$$

Таким образом, положение оптимального гипоцентра совпадает с центром тяжести системы точек с координатами x_i, y_i и весами φ_i^2.

4. Постановка задачи об определении оптимальной геометрии системы сейсмических станций. Пусть внутри Земли задана гипоцентральная область θ, в которой по некоторому закону $\rho(X,\ Y,\ H)$ распределены гипоцентры землетрясений, а на поверхности Земли задана область Ω, внутри которой следует разместить сейсмические станции для регистрации землетрясений из области θ. Область Ω будем называть областью планирования сейсмического эксперимента.

Задача планирования сейсмического эксперимента в общем случае заключается в том, чтобы разместить в области Ω сейсмические станции таким образом, чтобы функция

$$\Phi=T+\alpha S[J(X,\ Y,\ H,\ x_i,\ y_i)],$$

называемая функцией потерь, принимала минимальное значение. Здесь функционал $S[J(X,\ Y,\ H,\ x_i,\ y_i)]$ характеризует точность определения параметров гипоцентров, α — нормирующий множитель, а величина T характеризует общие затраты на эксперимент, выраженные, например, в денежных единицах. Обычно затраты T предполагаются пропорциональными стоимости измерений в каждой точке наблюдения [9]

$$T=\sum_{i=1}^{n} c_i \tau_i,$$

где c_i — стоимость измерений τ_i, проведенных в точках $(x_i,\ y_i)$.

Рассмотрим задачу планирования сейсмического эксперимента при заданном числе точек наблюдений в предположении, что все $c_i=0$, а функционал S имеет вид

$$S=\int_\theta J^2(X,Y,H,x_i,y_i)\rho(X,Y,H)\,d\theta,$$

где $\int_\theta \rho(X,\ Y,\ H)d\theta=1$ и $\rho(X,\ Y,\ H)$ — непрерывная функция координат X, Y, H.

В дальнейшем будем считать область планирования Ω неограниченной, а все измерения равноточными, т. е. $\varphi_i=1$.

5. Оптимальная геометрия точек наблюдений при определении координат гипоцентров землетрясений. Обратимся к системе линейных уравнений (3). В соответствии с результатами третьего раздела проведем масштабирование коэффициентов матрицы K системы с тем, чтобы матрица системы (3) стала более равновесной. Для этого элементы третьего столбца запишем в виде $k_{i3}=-d/2$, где $d>0$ — масштабный множитель, имеющий размерность длины. Тогда система линейных уравнений (3) перепишется в виде

$$Xx_i+Yy_i-\frac{d}{2}\,\xi_1=w_i, \tag{12}$$

где

$$\xi_1=\frac{\xi}{d}.$$

В общем случае при $n\geqslant 3$ в качестве решения системы (12) принимается решение нормальной системы уравнений

$$K^{\mathrm{T}}Kp=K^{\mathrm{T}}w. \tag{13}$$

Как известно, система линейных уравнений с квадратной матрицей имеет единственное решение, если ее определитель отличен от нуля. Для системы (13) равенство нулю определителя соответствует случаю, когда все точки наблюдений лежат на одной прямой. Очевидно, такое расположение следует считать наихудшим.

Будем искать решение поставленной задачи в виде

$$x_i=r_i\cos\psi_i \ \text{ и } \ y_i=r_i\sin\psi_i, \quad i=1,2,\ldots,n\geqslant 3.$$

Для того чтобы столбцы матрицы K были взаимно ортогональны, положим

$$r_i=r, \qquad \psi_i=\frac{2\pi}{n}(i-1).$$

Тогда евклидова норма обобщенной обратной матрицы K^+ системы (12) будет равна

$$\|K^+\|=2\left[\frac{1}{n}\left(\frac{1}{r^2}+\frac{1}{d^2}\right)\right]^{1/2},$$

а функция $J(X,\ Y,\ H,\ x_i,\ y_i)$ равняется:

$$J=2v\left\{\left(\frac{1}{r^2}+\frac{1}{d^2}\right)(R_0^2+r^2)\right\}^{1/2},$$

где $R_0^2=X^2+Y^2+H^2$.

Функционал

$$S=\int_\theta J^2(X,Y,H,x_i,y_i)\rho(X,Y,H)\,d\theta=2v^2\left[\frac{1}{r^2}+\frac{1}{d^2}\right][\mathscr{E}(R_0^2)+r^2]$$

будет тем меньше, чем меньше среднее значение R_0^2. Очевидно, S минимально также в том случае, когда центр системы наблюдений совпадает с центром распределения эпицентров землетрясений.

Найдем минимальное значение S как функции r. Продифференцируем S по r и приравняем производную нулю. В результате получим

$$r=\sqrt{d\sqrt{\mathscr{E}(R_0^2)}}. \tag{14}$$

Для того чтобы матрица K системы (12) была равновесной по столбцам, масштабный множитель d следует положить равным

$$d=\sqrt{2}r.$$

Тогда, подставляя последнее равенство в (14), найдем

$$r=\sqrt{2\mathscr{E}(R_0^2)}. \tag{14'}$$

Оценка погрешности в определении вектора p будет иметь вид

$$\|\Lambda p\|\leqslant v\left\{3\left[\frac{R_0^2}{\mathscr{E}(R_0^2)}+2\right]\right\}^{1/2}|\Delta t|. \tag{15}$$

Очевидно, что полученное распределение n сейсмических станций оптимально.

Рассмотрим в качестве примера случай, когда область θ представляет собой круговой цилиндр (с образующей, перпендикулярной дневной поверхности) высотой H_c и радиусом основания r_c, а гипоцентры землетрясений распределены равномерно по объему этого цилиндра. В этом случае среднее значение величины R_0^2 равно

$$\mathscr{E}(R_0^2)=\frac{r_c^2}{2}+\frac{H_c^2}{3}$$

и, следовательно,

$$r=\sqrt{r_c^2+\frac{2}{3}H_c^2}.$$

Если $H_c=0$, т. е. все землетрясения поверхностные, то $r=r_c$.

Из рассмотрения оценки (15) следует, что максимальная ошибка в определении координат гипоцентров землетрясений для оптимальной системы наблюдений не зависит от числа регистрирующих станций. Следовательно, если принимать во внимание затраты на каждую точку наблюдений, то оптимальной следует считать систему, состоящую из минимального числа точек, т. е. из трех.

Предположим, что система наблюдений состоит только из трех станций. В этом случае, дифференцируя функционал S по переменным x_i и y_i ($i=1, 2, 3$) и приравнивая производные нулю, нетрудно показать, что полученное оптимальное расположение сейсмических станций с точностью до поворота всей системы наблюдений вокруг центра окружности на произвольный угол ψ_0 единственно.

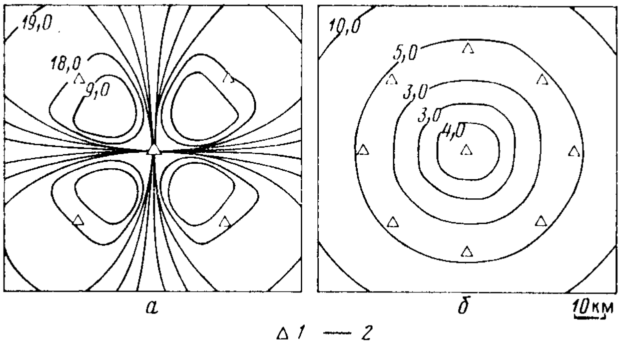
В общем случае при $n>3$ полученное решение не единственно.

В качестве примера рассмотрим систему наблюдений, содержащую более чем три точки, причем $n-1$ точек лежат на окружности радиуса r, а n-я точка находится в центре этой окружности, т. е. рассмотрим систему точек с координатами

$$x_i=r\cos\frac{2\pi}{n-1}(i-1),\ y_i=r\sin\frac{2\pi}{n-1}(i-1),\ x_n=y_n=0,\ i=1,2,\ldots,n-1\geqslant 3.$$

При таком расположении точек наблюдений векторы-столбцы матрицы K системы (12) также будут взаимно ортогональны, а оценка погрешности вектора p в этом случае имеет вид

$$\|\Delta p\|\leqslant 2v\left\{\left[\frac{n}{(n-1)r^2}+\frac{1}{d^2}\right]\left[R_0^2+\frac{n-1}{nr^2}\right]\right\}^{1/2}|\Delta t|. \tag{16}$$



Распределение ошибок в определении эпицентральных расстояний для двух систем наблюдений. *1* – сейсмические станции, *2* – изолинии ошибок, в км

Минимальное значение эта оценка имеет при

$$r^2=\frac{n}{n-1}dR_0=2\frac{n}{n-1}R_0^2$$

и для $r^2=2\frac{n}{n-1}\mathscr{E}(R_0^2)$ принимает вид

$$\|\Delta p\|\leqslant v\left\{3\left[\frac{R_0^2}{\mathscr{E}(R_0^2)}+2\right]\right\}^{1/2}|\Delta t|. \quad (16')$$

При этом, чтобы матрица системы (12) была равновесной, положим

$$d^2=2\frac{n-1}{n}r^2.$$

Легко заметить, что оценки (15) и (16′) совпадают и полученное распределение точек наблюдений также оптимально.

6. Оптимальная геометрия точек наблюдений при определении координат гипоцентров землетрясений, скорости распространения сейсмических волн и времени в очаге. Используя предложенный выше подход к исследованию уравнений (4)–(6), нетрудно определить оптимальные и неоптимальные системы наблюдений в тех случаях, когда кроме координат гипоцентров неизвестны или скорость распространения сейсмических волн, или время возникновения землетрясения (время в очаге), или и то и другое сразу.

В том случае, когда неизвестны скорость сейсмических волн или время в очаге, наихудшим расположением сейсмических станций является такое, при котором все точки наблюдений лежат на одной прямой или одной окружности.

Система наблюдений, в которой $n-1$ точки лежат на одной окружности, а n-я точка – в центре этой окружности, является оптимальной.

Если определению подлежат координаты гипоцентра, скорость распространения сейсмических волн и время в очаге одновременно, то наихудшим расположением точек наблюдений является такое, при котором все регистрирующие станции лежат на одной прямой или окружности. Для этого случая, по-видимому, существуют и другие неоптимальные системы наблюдений.

На рисунке, *а* и *б* приведены изолинии максимальных ошибок эпицентральных расстояний для двух систем наблюдений при погрешностях в определении t_i, равных $|\Delta t|=0{,}05$ с. На рисунке, *а* для случая системы из пяти станций четко выражена направленность системы наблюдений. Минимум значений ошибок приходится на направления, определяемые прямыми, проходящими через три станции. Максимум значений ошибок приходится на направления, определяемые прямыми, проходящими через центральную станцию под углом 45° к направлениям минимума ошибок. Рассматривая определитель det (K^TK), где K – матрица системы линейных уравнений (6), нетрудно показать, что на этих направлениях при $n=5$ система уравнений является вырожденной.

Заключение. Предложенный нестатистический подход к задаче планирования эксперимента позволяет получить решение задачи оптимального расположения сейсмических станций при определении координат гипоцентров при различных исходных данных. При этом в некоторых случаях решение можно получить в явном виде. Важными особенностями систем сейсмических наблюдений является то, что система станций, оптимальная при одних исходных данных, становится неоптимальной при других исходных данных. Причем чем больше неизвестных параметров входит в исходную систему уравнений, тем «хуже» становится система наблюдений. В частности, расчеты показывают, что для оптимальных систем наблюдений максимальные ошибки в определении координат гипоцентров землетрясений при известных времени в очаге и скорости сейсмических волн в несколько раз меньше максимальных ошибок при известной скорости сейсмических волн и неизвестном времени в очаге при прочих равных условиях. Следует также заметить, что определение неоптимальных систем наблюдений крайне важно для практических приложений.

Выше была рассмотрена задача оптимального расположения сети сейсмических станций в неограниченной области. В тех реальных случаях, когда область планирования включает в себя эпицентральную область и достаточно велика, полученные результаты могут быть приняты за основу при планировании сейсмических наблюдений.

Возможны и другие постановки задачи. Например, в области Ω уже размещены n точек наблюдений. Требуется по заданному закону $\rho(X, Y, H)$ определить оптимальное положение дополнительных m точек в Ω (и, возможно, число этих точек) в смысле критериев, рассмотренных выше. Эта задача решается численными методами путем минимизации некоторого функционала от целевой функции.

Литература

1. *Введенская Н. А.* О точности определения положения очага землетрясения методом засечек.– Тр. Геофиан, 1955, № 30(157), с. 127–136.
2. *Sato J., Skoko D.* Optimum distribution of seismic observation points. II.– Bull. Earthq. Res. Inst., 1965, v. 43, № 3, p. 451–458.
3. *Kijko A.* On optimal extensions of regional networks of seismik stations.– Publs. Inst. Geophys. Pol. Acad. Sci., 1975, v. 96, p. 57–119.
4. *Аранович З. И., Ахалбедашвили А. М., Гоцадзе О. Д., Деканосидзе Ц. А.* Методика расчета эффективности региональных сейсмических станций на примере Кавказа.– В кн.: Вопросы оптимизации и автоматизации сейсмических наблюдений. Тбилиси, 1977, с. 27–57.
5. *Аранович З. И.* О методике выбора оптимального расположения станций в локальной системе наблюдений.– В кн.: Методика и результаты оценки эффективности региональных систем сейсмических наблюдений. Тбилиси, 1980, с. 150–157.
6. *Кийко А.* Методы оптимального планирования региональных сетей сейсмических станций.– В кн.: Вычислительные методы в геофизики. М.: Наука, 1981, с. 82–84.
7. *Саваренский Е. Ф., Сафронов В. В., Пешков А. Б., Вербова Л. Ф., Пешкова И. В.* Оптимальное размещение сейсмических станций с позиции минимизации погрешности определения эпицентра.– Изв. АН СССР. Физика Земли, 1979, № 8, с. 64–71.
8. *Славина Л. Б.* О зависимости определения положения эпицентра от расположения станций и от особенностей времен пробега P-волн.– Изв. АН СССР. Физика Земли, 1971, № 2, с. 77–78.
9. *Федоров В. В.* Теория оптимального эксперимента. М.: Наука, 1971. 312 с.
10. *Бурмин В. Ю.* Задача планирования эксперимента и обусловленность систем линейных алгебраических уравнений.– Изв. АН СССР. Техн. кибернетика, 1976, № 2, с. 195–200.

Академия наук СССР
Институт физики Земли
им. О. Ю. Шмидта

Поступила в редакцию
28.XII.1984