ФИЗИКА ЗЕМЛИ, 1994, № 12, с. 34 - 43

УДК 550.344

ОПТИМАЛЬНОЕ РАСПОЛОЖЕНИЕ СЕЙСМИЧЕСКИХ СТАНЦИЙ НА ПОВЕРХНОСТИ ЗЕМНОГО ШАРА

© 1994 г. В. Ю. Бурмин
Институт сейсмологии ОИФЗ им. О.Ю. Шмидта РАН
Поступила в редакцию 28.06.93 г.

Получена система линейных алгебраических уравнений, связывающая координаты гипоцентров землетрясений и координаты сейсмических станций на поверхности земного эллипсоида. На основании этой системы выведены оценки погрешностей в определении параметров гипоцентров и рассмотрена задача оптимального размещения точек наблюдений на поверхности шара. Сформулированы основные принципы построения оптимальной системы телесейсмических наблюдений на земном шаре.

ВВЕДЕНИЕ

До настоящего времени задача оптимального расположения сейсмических станций на поверхности земного шара, по-видимому, никем не рассматривалась. Во всяком случае автору этой заметки такие работы не известны. В то же время с точки зрения теории планирования эксперимента современная сеть телесейсмических наблюдений является неоптимальной и не обеспечивает в достаточной степени решения большого круга задач, таких, как локализация гипоцентров слабых землетрясений ($m \le 4.5$), мониторинг сейсмичности на всей поверхности земного шара, изучение строения недр Земли и др. Создание оптимальной сети наблюдений позволит не только эффективно решать упомянутые задачи, но и сэкономить значительные средства за счет минимального числа точек наблюдений.

В настоящей заметке приведена система линейных алгебраических уравнений, связывающая координаты гипоцентров землетрясений и координаты сейсмических станций на поверхности земного эллипсоида. Для этой системы получены оценки погрешностей в определении параметров гипоцентров и на основании нестатистического критерия оптимальности, критерия C-оптимальности, введенного ранее автором, рассмотрена задача оптимального размещения точек наблюдений на поверхности шара. Сформулированы основные принципы построения оптимальной системы телесейсмических наблюдений.

1. УРАВНЕНИЯ, СВЯЗЫВАЮЩИЕ КООРДИНАТЫ ГИПОЦЕНТРОВ ЗЕМЛЕТРЯСЕНИЙ И КООРДИНАТЫ СЕЙСМИЧЕСКИХ СТАНЦИЙ НА ЭЛЛИПСОИДЕ

Запишем уравнения, связывающие координаты гипоцентров землетрясений и координаты сейсмических станций. Пусть для n сейсмических станций, расположенных на поверхности Земли, заданы географические координаты φ_i, λ_i и превышения над уровнем моря Δh_i, а гипоцентр землетрясения имеет координаты φ_0, λ_0 и глубину H_0. Поместим в центр Земли начало декартовой системы координат. Ось $0Z$ расположим по полярной оси земного эллипсоида, ось $0X$ – на пересечении плоскости экватора и плоскости начала счета долгот, ось $0Y$ – в плоскости экватора, но в меридиане, плоскость которого составляет с плоскостью начального меридиана угол 90°. Тогда можно записать систему нелинейных уравнений

$$(X_0 - x_i)^2 + (Y_0 - y_i)^2 + (Z_0 - z_i)^2 = r_i^2, \qquad (1)$$

связывающую координаты гипоцентра и регистрирующих станций в декартовой системе координат. В уравнениях (1) X_0, Y_0, Z_0 – координаты гипоцентра; x_i, y_i, z_i – координаты сейсмических станций; $\mathbf{r}_i = \mathbf{R}_i - \mathbf{R}_0$; $|\mathbf{R}_i| = R_i = \sqrt{x_i^2 + y_i^2 + z_i^2}$; $|\mathbf{R}_0| = R_0 = \sqrt{X_0^2 + Y_0^2 + Z_0^2}$; $i = 1, 2, \ldots, n$.

Связь между географическими и декартовыми координатами на поверхности эллипсоида записывается с помощью формул (Закатов, 1964)

$$x = \frac{a\cos\varphi\cos\lambda}{\sqrt{1 - e^2\sin\varphi}}, \quad y = \frac{a\cos\varphi\sin\lambda}{\sqrt{1 - e^2\sin\varphi}}, \quad z = \frac{a(1 - e^2)\sin\varphi}{\sqrt{1 - e^2\sin\varphi}}, \qquad (2)$$

где a – большая полуось эллипсоида; $e^2 = (a^2 - b^2)/a^2$ – первый эксцентриситет меридианного эллипса; b – малая полуось эллипсоида.

Решение системы уравнений (1) будем искать на поверхности шара радиусом R_0. При этом будут справедливы соотношения

$$X_0 = R_0\cos\varphi\cos\lambda,\ Y_0 = R_0\cos\varphi\sin\lambda,\ Z_0 = R_0\sin\varphi. \quad (2')$$

Раскроем скобки в (1) и воспользуемся соотношениями для R_i и R_0 (см. рис. 1). Тогда будем иметь

$$X_0x_i + Y_0y_i + Z_0z_i = 0.5\,(R_0^2 + R_i^2 - r_i^2). \quad (3)$$

В правую часть уравнения (3) входят величины r_i^2, которые равны:

$$r_i^2 = R_0^2 + R_i^2 - 2R_0R_i\cos\psi_i,$$

где $\psi_i = d_i/R_i$ – угол между векторами $\mathbf{R}_0$ и $\mathbf{R}_i$; d_i – эпицентральные расстояния.

Обозначим $r_0 = R_0$. Подставляя ψ_i в выражения для r_i^2, а r_i^2 в уравнения (3) и деля правую и левую его части на r_0R_i, получим

$$Uu_i + Vv_i + Ww_i = \cos(d_i/R_i) = \cos(\psi_i), \quad (4)$$

где $U = X_0/r_0$; $V = Y_0/r_0$; $W = Z_0/r_0$; $u = x_i/R_i$; $v_i = y_i/R_i$; $w_i = z_i/R_i$; $r_0 = R_3 - h$; h – глубина гипоцентра, отсчитываемая от поверхности Земли; R_3 – величина радиуса Земли в соответствующей точке земной поверхности, которая равна $\sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}$, а X, Y, Z определяются из соотношений (2). При этом координаты гипоцентра не должны выходить за пределы земного эллипсоида, т.е. сумма квадратов неизвестных U, V, W должна удовлетворять неравенству

$$U^2 + V^2 + W^2 \le \frac{1 + e^4\sin^2\varphi - 2e^2(\sin\varphi)/a}{1 - e^2\sin\varphi}. \quad (5)$$

Система уравнений (4) представляет собой систему линейных алгебраических уравнений относительно трех неизвестных величин U, V и W. В правую часть уравнений (4) входят величины ψ_i – угловые эпицентральные расстояния на поверхности сферы радиуса R_i, которые зависят от h и которые необходимо предварительно вычислить. Решая уравнения (4), получим

$$X_0 = U/r_0;\quad Y_0 = V/r_0;\quad Z_0 = W/r_0;$$
$$R_0 = \sqrt{X_0^2 + Y_0^2 + Z_0^2};\quad H = R_3 - R_0.$$

Таким образом, мы рассмотрели уравнения, связывающие координаты гипоцентров φ, λ и H и координаты сейсмических станций, расположенных на поверхности земного эллипсоида. Однако на практике при локализации далеких землетрясений больший интерес представляет задача определения четырех параметров гипоцентра: φ, λ, H и τ_0, т.е. собственно координат гипоцентров и времени

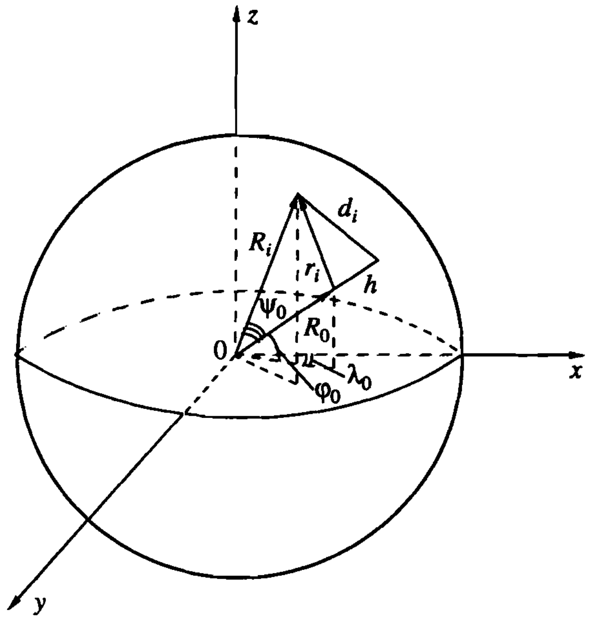

Рис. 1. Рисунок, поясняющий переход от географических к геоцентрическим координатам.

возникновения землетрясения или времени в очаге. Для этого случая запишем величины r_i^2 в виде

$$r_i^2 = c_i^2(\tau_i - \tau_0)^2 = c_i^2\tau_i^2 - 2c_i^2\tau_i\tau_0 + c_i^2\tau_0^2,$$

где τ_i – времена прихода сейсмических волн на станции; τ_0 – время в очаге; c_i – эффективные скорости распространения сейсмических волн, численно равные отношению гипоцентрального расстояния к времени их пробега по лучу.

Подставим полученное выражение для r_i^2 в правую часть уравнения (3) и сгруппируем члены. В результате будем иметь

$$X_0x_i + Y_0y_i + Z_0z_i - T_0\tau_ic_i^2 =$$
$$= 0.5\,[r_0^2 + R_i^2 - c_i^2(\tau_i^2 + \tau_0^2)]$$

или, проводя соответствующие преобразования, окончательно получим

$$Uu_i + Vv_i + Ww_i - Qq_i = \\ = \cos(d_i/R_i) - \tau_0\tau_ic_i^2/(r_0R_i), \quad (6)$$

где U, V, W, u_i, v_i, w_i – те же, что в уравнениях (4); $Q = T_0/r_0$; $q_i = \tau_ic_i^2/R_i$. При этом, как и раньше, должно выполняться соотношение (5).

Остановимся на оценках погрешностей в определении параметров гипоцентров далеких землетрясений и вопросах устойчивости решения систем линейных уравнений (4) и (6). Для близких землетрясений эти вопросы изучались в работах автора (Бурмин, 1976, 1986). Воспользуемся здесь результатами этих работ.

2. ОЦЕНКИ ПОГРЕШНОСТЕЙ В ОПРЕДЕЛЕНИИ ПАРАМЕТРОВ ГИПОЦЕНТРОВ ДАЛЕКИХ ЗЕМЛЕТРЯСЕНИЙ

Запишем системы (4) и (6) в матричном виде

$$Kp = f, \qquad (7)$$

где $p = \{p_j\}$ – искомые параметры; $j = 1, 2, 3$ или $j = 1, 2, 3, 4$; K – матрицы систем; $f = \{f_i\}$ – наблюдаемые величины; $i = 1, \ldots, n$.

При условии невырожденности матрицы $K^{\tau}K$, решение уравнения (7) дается формулой

$$p = K^{+}f,$$

где $K^{+} = (K^{\tau}K)^{-1}K^{\tau}$, а "т" означает операцию транспонирования.

Если вектор свободных членов f и матрица K заданы с погрешностями $\Delta f \neq 0$ и $\Delta K \neq 0$, то в этом случае для погрешности вектора p имеем уравнение (Бурмин, 1986)

$$\tilde{K}\Delta p = \Delta f - \Delta K p. \qquad (8)$$

Решением этого уравнения будет

$$\Delta p = \tilde{K}^{+}(\Delta f - \Delta K p).$$

Для погрешностей отдельных компонент Δp_j вектора Δp получаем следующее соотношение:

$$\Delta p_j = \tilde{k}^{(+)}(\Delta f - \Delta K p),$$

где $\tilde{k}^{(+)}$ – вектор-строка матрицы $\tilde{K}^{+}$.

Для абсолютного значения j-й компоненты вектора Δp будет иметь место неравенство

$$|\Delta p_j| = \left|\tilde{k}^{(+)}(\Delta f - \Delta K p)\right| \leq \left\|\tilde{k}_j^{(+)}\right\| \|\Delta f - \Delta K p\|, \qquad (9)$$

где $\|*\|$ – евклидова норма. Или для погрешности полного вектора Δp соответственно имеем

$$\|\Delta p\| \leq \left\|\tilde{K}^{+}\right\| \|\Delta f - \Delta K p\|. \qquad (9')$$

Обратимся теперь к системе линейных уравнений (4). Будем считать, что ошибки как в элементах матрицы K, так и в правых частях уравнений обусловлены ошибками только времен прихода волн τ_i, абсолютные значения которых можно принять равными $|\delta\tau_i| = \rho_i|\Delta\tau|$. Весовой множитель ρ_i характеризует как качество измерений на i-й станции, так и систематическую ошибку, обусловленную отклонением истинных скоростей от принятой модели.

Если $|\delta\tau_i|$ для каждого $i = 1, 2, \ldots, n$ есть среднее значение абсолютной погрешности в определении τ_i, т.е.

$$\rho_i|\Delta\tau_i| = \mathscr{E}(|\delta\tau_i|), \text{ то } \rho_i = \frac{\mathscr{E}(|\delta\tau_i|)}{|\delta\tau_i|}, \quad |\Delta\tau| \neq 0.$$

Нормировочный множитель $|\Delta\tau|$ можно положить равным среднему значению абсолютной погрешности на всех сейсмических станциях, участвующих в наблюдении, т.е. $|\Delta\tau| = \mathscr{E}[\mathscr{E}(|\delta\tau_i|)]$. В этом случае

$$\rho_i = \frac{\mathscr{E}(|\delta\tau_i|)}{\mathscr{E}[\mathscr{E}(|\delta\tau_i|)]}.$$

Можно положить $|\Delta\tau|$ равным абсолютному значению максимально допустимой ошибки в определении времен прихода сейсмических волн на станции. Тогда $0 \leq \rho_i \leq 1$.

Если $|\delta\tau_i|$ представляет собой максимальное значение погрешности в определении τ_i на каждой станции ($i = 1, 2, \ldots, n$), то

$$\rho_i = \frac{|\delta\tau_i|}{|\Delta\tau|}.$$

Причем если $|\delta\tau_i| = |\Delta\tau|$ ($i = 1, 2, \ldots, n$), т.е. $|\delta\tau_i|$ является максимальным значением погрешности, то $\rho_i = 1$.

Помимо случайных ошибок в определении времен прихода сейсмических волн на станции величины $|\delta\tau_i|$ и, следовательно, ρ_i могут отражать отклонение наблюденных времен пробега сейсмических волн, распространяющихся в реальной неоднородной трехмерной среде, от времен пробега волн, распространяющихся в среде с принятым в интерпретации законом изменения скорости.

Таким образом, весовые множители ρ_i отражают как неравноточность измерений на станциях, так и систематические отклонения в определении τ_i, связанные с неоднородностью реальных сред.

Рассмотрим систему (4). В этом случае $\Delta K = 0$, а $\Delta f \neq 0$. Элементы вектора Δf в этом случае равны $\delta f_i = -\sin(d_i/R_i)\delta d_i$. Если принять, что $\delta d_i = \delta\tau_i/\alpha_i$, где $\alpha_i = t_i'$ – производная годографа в соответствующей точке, то будем иметь $\delta f_i = -\sin(d_i/R_i)\delta\tau_i/\alpha_i$ ($\alpha_i \neq 0$). Для полного вектора погрешности для уравнения (4) будем иметь

$$\|\Delta p\| \leq \left\|\tilde{K}^{+}\right\| \|\sin(d/R)\rho/\alpha\| |\Delta\tau|. \qquad (10)$$

Параметры p_j в данном случае соответственно равны: $p_1 = X_0/r_0$, $p_2 = Y_0/r_0$, $p_3 = Z_0/r_0$.

Пусть система линейных уравнений (8) отвечает случаю, когда неизвестным наряду с X_0, Y_0 и Z_0 является также и T_0. Для нее $\Delta K \neq 0$ и $\Delta f \neq 0$. Причем $\delta f_i = -\sin(d_i/R_i)\delta\tau_i/\alpha_i - \delta\tau_i\tau_0 c_i^2/(r_0R_i)$ и $(\Delta Kp)_i = -\delta\tau_i T_0 c_i^2/(r_0R_i)$. Если положить $\tau_0 \approx T_0$, то получим, что $(\Delta f - \Delta Kp)_i = -\sin(d_i/R_i)\delta\tau_i/\alpha_i$. Таким образом, и в этом случае приходим к неравенству (10), а $p_4 = T_0/r_0$.

Отметим некоторые свойства оценок (10). Прежде всего, эти оценки неулучшаемы. Это, в частности, означает, что при любых фиксированных значениях параметров в правых частях неравенств всегда можно так подобрать знаки ошибок времен прихода сейсмических волн на станции, что равенства будут достигаться. Другим свойством оценок является их униформность. Последнее свойство позволяет выработать единый подход к исследованию систем (4) и (6) для различных случаев исходных данных и соответственно для различного набора искомых параметров. И наконец, пожалуй, наиболее важное свойство – это то, что эти оценки учитывают погрешности самой матрицы K, что является принципиальным при оценивании погрешностей в случае неизвестных параметров λ, φ, H и T_0.

Пусть погрешности $\delta\tau_i$ в определении времен прихода сейсмических волн на станции являются независимыми величинами, случайные компоненты которых имеют нулевые математические ожидания и конечные дисперсии $\sigma_i^2(\Delta f - \Delta Kp)$. Тогда, как известно (Худсон, 1970), дисперсия оцениваемых параметров будет определяться из соотношения

$$D(\Delta p) = [\tilde{K}^{\mathrm{T}} D^{-1}(\Delta f - \Delta Kp)\tilde{K}]^{-1},$$

где $D(\Delta p)$ – ковариационная матрица оцениваемых параметров, а $D(\Delta f - \Delta Kp)$ – ковариационная матрица вектора-столбца свободных членов линейной системы. Так как погрешности $\delta\tau_i$ в определении времен прихода сейсмических волн на станции являются независимыми величинами, то матрица $D(\Delta f - \Delta Kp)$ будет являться диагональной матрицей с элементами, равными $\sin^2(d_i/R_i)\sigma_i^2/\alpha_i^2$ (σ_i^2 – дисперсии величин $\delta\tau_i$). Соответственно элементы матрицы $D^{-1}(\Delta f - \Delta Kp)$ будут равны $1/[\sin^2(d_i/R_i)\sigma_i^2/\alpha_i^2]$.

Выше получены оценки погрешностей в определении неизвестных параметров U, V, W и Q. Найдем оценки для φ, λ, H и T_0. Для T_0 сразу находим, $\sigma_T^2 = \sigma_Q^2/r_0^2$. Здесь σ_T^2 и σ_Q^2 – дисперсии параметров T_0 и Q соответственно.

Далее, учитывая, что $U = \cos\varphi\cos\lambda$, $V = \cos\varphi\sin\lambda$ и $W = \sin\varphi$, и беря полное приращение от правых и левых частей этих равенств, для определения $\delta\varphi$ и $\delta\lambda$ будем иметь систему трех линейных алгебраических уравнений относительно двух неизвестных

$$\left.\begin{aligned} -\sin\varphi\,\cos\lambda\delta\varphi - \cos\varphi\,\sin\lambda\delta\lambda &= \delta U,\\ -\sin\varphi\,\sin\lambda\delta\varphi + \cos\varphi\,\cos\lambda\delta\lambda &= \delta V,\\ \cos\varphi\delta\varphi &= \delta W. \end{aligned}\right\}$$

Элементы матрицы нормальных уравнений и вектора свободных членов для этой системы равны

$$a_{11} = 1;\ a_{12} = a_{21} = 0;\ a_{22} = \cos^2\varphi;$$

$$a_{13} = \cos\varphi\delta W - \sin\varphi(\cos\lambda\delta U + \sin\lambda\delta V);$$

$$a_{23} = \cos\varphi(\cos\lambda\delta V - \sin\lambda\delta U).$$

Следовательно, погрешности в определении φ и λ будут равны:

$$\delta\varphi = \cos\varphi\delta W - \sin\varphi(\cos\lambda\delta U - \sin\lambda\delta V);$$

$$\delta\lambda = (\cos\lambda\delta V - \sin\lambda\delta U)/\cos\varphi.$$

Дисперсии σ_φ^2 и σ_λ^2 величин $\delta\varphi$ и $\delta\lambda$ будут равняться значениям диагональных элементов ковариационной матрицы $D(\delta\varphi, \delta\lambda)$, которая в общем случае не является диагональной и равна

$$D(\delta\varphi, \delta\lambda) = [K^{\mathrm{T}} D^{-1}(\delta U, \delta V, \delta W)K]^{-1}.$$

Здесь K – матрица системы (11); $D^{-1}(\delta U, \delta V, \delta W)$ – дисперсионная матрица параметров δU, δV, δW.

Для того чтобы найти погрешности в определении глубины H гипоцентра, необходимо знать погрешность в определении R_0. Нетрудно проверить, что (здесь для простоты мы опускаем индекс “0”)

$$\delta R = U\delta X + V\delta Y + W\delta Z,$$

а

$$\delta X = r\delta U,\quad \delta Y = r\delta V,\quad \delta Z = r\delta W.$$

И, следовательно,

$$\delta R = r(U\delta U + V\delta V + W\delta W).$$

Отсюда среднеквадратичное отклонение параметра δR будет равно

$$\sigma_R = r\sqrt{U^2\sigma_U^2 + V^2\sigma_V^2 + W^2\sigma_W^2}.$$

И $\sigma_H = \sigma_R$.

3. УСТОЙЧИВОСТЬ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ПАРАМЕТРОВ ГИПОЦЕНТРОВ ДАЛЕКИХ ЗЕМЛЕТРЯСЕНИЙ

Оценка (9'), являясь мажорантной, дает гарантированную точность в определении параметров гипоцентров далеких землетрясений. Если варьировать координаты точек наблюдений, то можно подобрать такое их положение, при котором оценка (9') примет минимальное значение. Поскольку правая часть неравенства (9') представляет собой оценку максимальной погрешности в определении параметров гипоцентров, то приходим к минимаксной задаче определения оптимального размещения сейсмических станций на земном шаре. Таким образом, задачу определения оптимальной геометрии системы наблюдений можно рассматривать как задачу минимизации целевой функции

$$J = \|\tilde{K}^{+}\| \|\sin(d/R)\rho/\alpha\|,$$

а точнее, некоторого функционала от целевой функции J [Бурмин, 1986].

Для того чтобы выявить наиболее общие черты оптимальной системы сейсмологических наблюдений, необходимо подробно рассмотреть целевую функцию J. Представим функцию J в виде произведения двух функций $J_1 = \|\tilde{K}^{+}\|$ и $J_2 = \|\sin(d/R)\rho/\alpha\|$ и рассмотрим их каждую в отдельности.

Обратимся сначала к рассмотрению функции $J_2 = \|\sin(d/R)\rho/\alpha\|$. Понятно, что целевая функция J тем меньше, чем меньше значения функции J_2. При фиксированном положении гипоцентра землетрясения J_2 стремится к нулю при стремлении к нулю d_i. При фиксированном положении точек наблюдений J_2 является функцией координат гипоцентра. Чтобы найти минимум J_2 как функции координат гипоцентра, запишем J_2 в виде

$$J_2 = \left\{\sum_{i=1}^{n}[1-(Uu_i+Vv_i+Ww_i)^2]\rho_i^2/\alpha_i^2\right\}^{1/2}.$$

Дифференцируя последнее выражение по U, V и W и приравнивая производные к нулю, для определения координат оптимального гипоцентра получим систему линейных уравнений:

$$\left.\begin{aligned}
U\sum_{i=1}^{n}u_i^2\frac{\rho_i^2}{\alpha_i^2}+V\sum_{i=1}^{n}u_iv_i\frac{\rho_i^2}{\alpha_i^2}+W\sum_{i=1}^{n}u_iw_i\frac{\rho_i^2}{\alpha_i^2}&=\sum_{i=1}^{n}u_i\frac{\rho_i^2}{\alpha_i^2},\\
U\sum_{i=1}^{n}u_iv_i\frac{\rho_i^2}{\alpha_i^2}+V\sum_{i=1}^{n}v_i^2\frac{\rho_i^2}{\alpha_i^2}+W\sum_{i=1}^{n}v_iw_i\frac{\rho_i^2}{\alpha_i^2}&=\sum_{i=1}^{n}v_i\frac{\rho_i^2}{\alpha_i^2},\\
U\sum_{i=1}^{n}u_iw_i\frac{\rho_i^2}{\alpha_i^2}+V\sum_{i=1}^{n}w_iv_i\frac{\rho_i^2}{\alpha_i^2}+W\sum_{i=1}^{n}w_i^2\frac{\rho_i^2}{\alpha_i^2}&=\sum_{i=1}^{n}w_i\frac{\rho_i^2}{\alpha_i^2}.
\end{aligned}\right\} \quad (11)$$

Заметим, что матрица этой системы отличается от матрицы нормальных уравнений для системы (4) только множителями ρ_i^2/α_i^2. Решение системы (11) определяет некоторую точку внутри шара и зависит главным образом от координат точек наблюдений.

Перейдем теперь к рассмотрению функции J_1. Пусть матрица $\tilde{K}$ является матрицей полного ранга. Тогда для $\|\tilde{K}^{+}\|$ справедлива двусторонняя оценка (Бурмин, 1976)

$$\left(\sum_{j=1}^{m}\frac{1}{\|\tilde{k}_j\|^2}\right)^{1/2} \le \|\tilde{K}^{+}\| \le \left(\frac{\prod_{j=1}^{m}\|\tilde{k}_j\|^2}{\det(\tilde{K}^{\mathrm{T}}\tilde{K})}\sum_{j=1}^{m}\frac{1}{\|\tilde{k}_j\|^2}\right)^{1/2}.$$

Для числа обусловленности матрицы $\tilde{K}$, равного $\mathrm{cond}(\tilde{K}) = \|\tilde{K}\|\|\tilde{K}^{+}\|$, соответствующая оценка имеет вид

$$\mu(\tilde{K}) \le \mathrm{cond}(\tilde{K}) \le \frac{\mu(\tilde{K})}{\delta(\tilde{K})},$$

где

$$\mu(K) = \left(\sum_{j=1}^{m}\frac{1}{\|\tilde{k}_j\|^2}\sum_{j=1}^{m}\|\tilde{k}_j\|^2\right)^{1/2};$$

$$\delta(\tilde{K}) = \left(\frac{\det(\tilde{K}^{\mathrm{T}}\tilde{K})}{\prod_{j=1}^{m}\|\tilde{k}_j\|^2}\right)^{1/2}.$$

Рассмотрим величины $\delta(K)$ и $\mu(K)$. Величина $\delta(K)$ характеризует скошенность матрицы K и имеет простой геометрический смысл – $\delta(K)$ суть отношение объема параллелепипеда, натянутого на векторы-столбцы матрицы K, к объему прямоугольного параллелепипеда с ребрами той же длины. Очевидно, что $0 \le \delta(K) \le 1$ и равенство $\delta(K) = 1$ достигается в том случае, если векторы-столбцы матрицы K взаимно ортогональны. Если $\delta(K) = 0$, то это означает, что векторы-столбцы матрицы K линейно зависимы и величина $\|K^{+}\|$ становится неограниченно большой, а система линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) – вырожденной.

Величина $\mu(K) \ge m$ и характеризует неравновесность по столбцам матрицы K. Причем равенство $\mu(K) = m$ достигается, если нормы столбцов матрицы K равны между собой, т.е. на равновесных по столбцам матрицах. Если длина одного из векторов-столбцов матрицы K стремится к нулю, то величина $\mu(K)$ и, следовательно, величина $\|K^{+}\|$ стремятся к бесконечности. В этом случае СЛАУ также становится вырожденной.

Наиболее устойчивое решение СЛАУ имеет в том случае, когда при фиксированной норме матрицы исходной системы определитель нормальной системы уравнений принимает максимальное значение (Бурмин, 1976). В этом случае число обусловленности также принимает максимальное значение. Если рассматривать столбцы матрицы размерностью $n \times m$ как векторы в n-мерном пространстве, то максимальному значению определителя нормальной системы соответствует максимальный объем m-мерного параллелепипеда, натянутого на векторы-столбцы матрицы.

4. ОПТИМАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ ТЕЛЕСЕЙСМИЧЕСКОЙ СЕТИ НАБЛЮДЕНИЙ

Обратимся к системе (4). Запишем для нее матрицу нормальных уравнений

$$B = K^TK = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{n} u_i^2 & \sum_{i=1}^{n} u_iv_i & \sum_{i=1}^{n} u_iw_i \\ \sum_{i=1}^{n} u_iv_i & \sum_{i=1}^{n} v_i^2 & \sum_{i=1}^{n} v_iw_i \\ \sum_{i=1}^{n} u_iw_i & \sum_{i=1}^{n} v_iw_i & \sum_{i=1}^{n} w_i^2 \end{pmatrix}. \quad (12)$$

Согласно формуле Бине–Коши (Фаддеев, Фаддеева, 1963) определитель матрицы B равен

$$\det(B) = \sum_{i_1<i_2<i_3}^{n} \begin{vmatrix} u_{i_1} & v_{i_1} & w_{i_1} \\ u_{i_2} & v_{i_2} & w_{i_2} \\ u_{i_3} & v_{i_3} & w_{i_3} \end{vmatrix}^2. \quad (13)$$

Значение каждого определителя, стоящего под знаком суммы в (13), равняется ушестеренному значению объема тетраэдра с вершинами $M_{i_1}(u_{i_1}, v_{i_1}, w_{i_1})$, $M_{i_2}(u_{i_2}, v_{i_2}, w_{i_2})$, $M_{i_3}(u_{i_3}, v_{i_3}, w_{i_3})$, расположенными на сфере единичного радиуса, и вершиной $M_0(0, 0, 0)$ в центре этой сферы и не зависит от положения гипоцентров регистрируемых землетрясений. Таким образом, определитель матрицы (12) нормальных уравнений равен тридцати шести значениям суммы квадратов объемов всех тетраэдров с вершинами M_0, M_{i_1}, M_{i_2}, M_{i_3}.

Понятно, что если все вершины тетраэдров (кроме той, что совпадает с центром сферы) лежат на одной дуге большого круга, то объемы соответствующих тетраэдров будут равны нулю. Это значит, что если все точки наблюдений лежат на одной дуге большого круга, то определитель системы нормальных уравнений будет равен нулю, а сама система будет вырожденной.

Рассмотрим теперь систему линейных уравнений (6). Для системы (6) будем иметь соотношение, аналогичное (13):

$$\det(B) = \sum_{i_1<i_2<i_3}^{n} \begin{vmatrix} u_{i_1} & v_{i_1} & w_{i_1} & -q_{i_1} \\ u_{i_2} & v_{i_2} & w_{i_2} & -q_{i_2} \\ u_{i_3} & v_{i_3} & w_{i_3} & -q_{i_3} \\ u_{i_4} & v_{i_4} & w_{i_4} & -q_{i_4} \end{vmatrix}^2. \quad (14)$$

Разложим определители в (14) по последнему столбцу. Тогда будем иметь

$$\det(B) = \sum_{i_1<i_2<i_3}^{n} \left\{ q_{i_1} \begin{vmatrix} u_{i_2} & v_{i_2} & w_{i_2} \\ u_{i_3} & v_{i_3} & w_{i_3} \\ u_{i_4} & v_{i_4} & w_{i_4} \end{vmatrix} - q_{i_2} \begin{vmatrix} u_{i_1} & v_{i_1} & w_{i_1} \\ u_{i_3} & v_{i_3} & w_{i_3} \\ u_{i_4} & v_{i_4} & w_{i_4} \end{vmatrix} + \right.$$

$$\left. + q_{i_3} \begin{vmatrix} u_{i_1} & v_{i_1} & w_{i_1} \\ u_{i_2} & v_{i_2} & w_{i_2} \\ u_{i_4} & v_{i_4} & w_{i_4} \end{vmatrix} - q_{i_4} \begin{vmatrix} u_{i_1} & v_{i_1} & w_{i_1} \\ u_{i_2} & v_{i_2} & w_{i_2} \\ u_{i_3} & v_{i_3} & w_{i_3} \end{vmatrix} \right\}^2. \quad (15)$$

Нетрудно убедиться в том, что все определители в фигурных скобках равны ушестеренному значению объемов тетраэдров с вершинами M_{i_2}, M_{i_3}, M_{i_4}, M_0; M_{i_1}, M_{i_3}, M_{i_4}, M_0; M_{i_1}, M_{i_2}, M_{i_4}, M_0; M_{i_1}, M_{i_2}, M_{i_3}, M_0 и не зависят от положения гипоцентров, в то время как значение самого определителя матрицы B зависит от положения гипоцентра. Тем не менее для каждого фиксированного положения гипоцентра значение определителя матрицы B нормальной системы линейных уравнений тем больше, чем больше значения каждого определителя в (15), т.е. чем больше объемы всех тетраэдров с общей вершиной M_0. Таким образом, оптимальность расположения сейсмических станций на земном шаре слабо зависит от положения гипоцентров землетрясений и в основном определяется внутренней геометрией сети наблюдений.

Чтобы получить численные значения координат точек наблюдений, соответствующие максимальному значению определителя нормальной системы уравнений, необходимо продифференцировать соответствующий определитель по координатам, приравнять производные к нулю и решить получившуюся систему уравнений.

В то же время максимальное значение определители (13) и (14) примут в том случае, когда сумма квадратов величин объемов всех тетраэдров, вписанных в единичную сферу, будет максимальной. С другой стороны, каждый набор точек на сфере представляет собой набор вершин некоторого многогранника, объем которого равен сумме объемов соответствующих тетраэдров с одной

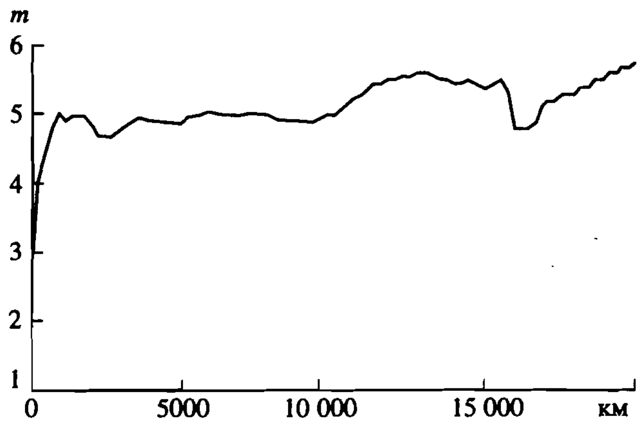

Рис. 2. Зависимость m_{min} от эпицентральных расстояний (по данным Л.В. Антоновой и др.).

общей вершиной в центре шара. Известно (Фейш Тот, 1958), что *многогранник, имеющий самый большой объем среди всех многогранников с данным числом вершин, вписанных в какую-то фиксированную гладкую выпуклую поверхность, обязательно является истинным многогранником с треугольными гранями, т.е. является многогранником, который имеет только треугольные грани, лежащие в различных плоскостях*. В частности, для объема многогранника, вписанного в единичный шар, имеет место неравенство (Фейш Тот, 1958)

$$V \le \frac{2k}{3}\cos^2\frac{\pi f}{2k}\operatorname{ctg}\frac{\pi e}{2k}\left(1-\operatorname{ctg}^2\frac{\pi f}{2k}\operatorname{ctg}^2\frac{\pi e}{2k}\right),$$

где e, f и k – число соответственно вершин, граней и ребер выпуклого многогранника. Здесь равенство достигается для правильного многогранника с треугольными гранями. Как известно, существуют три таких многогранника: тетраэдр, октаэдр и икосаэдр (Фейш Тот, 1958).

Если бы любое землетрясение регистрировалось в любой точке поверхности земного шара, то, чтобы получить оптимальную систему наблюдений для локализации гипоцентров землетрясений, достаточно было бы поместить сейсмические станции в точки, совпадающие с вершинами одного из правильных тетраэдров, вписанных в земной шар. Но так как землетрясения с различными магнитудами регистрируются на различных расстояниях от гипоцентра, то расстояния между станциями в сети наблюдений должны выбираться в соответствии с минимальной силой землетрясений, подлежащих регистрации. Остановимся на этом вопросе подробнее.

По определению магнитуда землетрясения вычисляется по формуле (Инструкция ..., 1981):

$$m = \lg(A/T) + \delta(\Delta, h, s(T, \omega)) - \Delta m,$$

где A – максимальная амплитуда смещения грунта на данной станции в микронах (μ) для рассматриваемого типа сейсмической волны, T – соответствующий этой амплитуде период волны, $\delta(\Delta, h, s(T, \omega))$ – так называемая калибровочная кривая (функция) для данного региона, Δm – величина, характеризующая систематическое отклонение в оценке магнитуд для данной станции. Если магнитуда землетрясения мала, то удаленные сейсмические станции или станции с малым увеличением не зарегистрируют его. Поэтому, чтобы правильно выбрать базу сети наблюдений, необходимо знать распределение значения минимальных магнитуд m_{min} землетрясений, которые регистрируются данной сейсмической станцией, от эпицентральных расстояний. В работе (Антонова и др., 1974) предлагается для определения m_{min} формула

$$m_{min} = \lg(\gamma A_п/(VT)) + \delta(\Delta, h, s(T, \omega)) - \Delta m.$$

В этой формуле параметр γ равен минимально возможному отношению амплитуды полезного сигнала к уровню помех, достаточному для его выделения (на практике принято полагать $\gamma \sim 1.5$); $A_п$ – амплитуда помех на сейсмограмме в мм; V – увеличение прибора в тысячах. Обычно на сейсмических станциях увеличение подбирается таким образом, чтобы $A_п$ было порядка 1 мм.

Калибровочная функция $\delta(\Delta, h, s(T, \omega))$ достаточно хорошо изучена. Для разных типов аппаратуры и для различных регионов СНГ для ближней и дальней зон значения калибровочных функций приведены в Инструкции о порядке производства и обработки наблюдений на сейсмических станциях ЕССН СССР (Инструкция ..., 1981). Значения Δm для различных регионов приведены, например, в работе (Антонова и др., 1974). Обычно абсолютное значение поправки Δm не превышает 0.25.

На рис. 2 представлен график зависимости значений магнитуды m_{min} от эпицентрального расстояния для сейсмической станции с увеличением $V = 40$ тыс. ($\Delta m = 0$). При этом была использована осредненная калибровочная кривая (Инструкция ..., 1981).

Таким образом, в качестве точек оптимальной сети наблюдений следует выбрать вершины правильного или полуправильного многогранника, имеющего: а) в качестве граней треугольники; б) длину стороны грани, близкую к заданной, в соответствии с минимальной магнитудой регистрируемого землетрясения, так, чтобы землетрясение было зарегистрировано по крайней мере тремя (четырьмя) станциями. Для построения такой системы за основу можно взять один из правильных многогранников: тетраэдр, октаэдр или икосаэдр, вписанных в земной шар. Как известно, тетраэдр имеет 4 грани, 4 вершины и 6 ребер, октаэдр – 8 граней, 6 вершин и 12 ребер, а икосаэдр – 20 граней, 12 вершин и 30 ребер. Спроек-

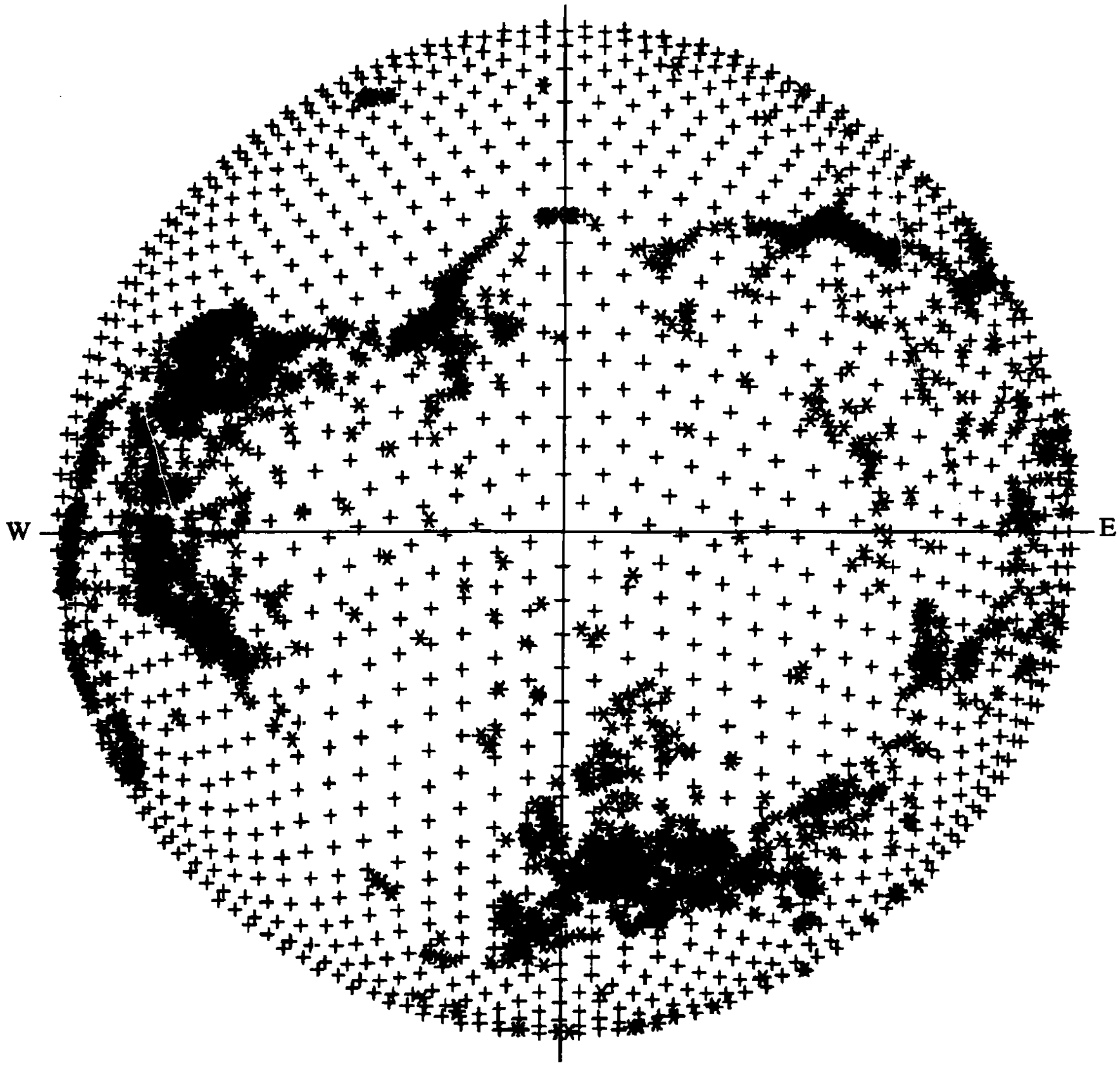

Рис. 3. Ортогональная проекция полусферы единичного радиуса с точками наблюдений на плоскость. Центр проекции совпадает с вершиной правильного икосаэдра. + – точки оптимальной телесейсмической сети наблюдений; * – точки существующей сети наблюдений.

тируем каждый из трех многогранников из центра шара на земную поверхность. Тогда получим правильные сферические многогранники, гранями которых являются равные равносторонние сферические треугольники. Длина сторон каждого треугольника равна, в радианах, $\Delta = \mathrm{arctg}2$ (Волынский, 1977) и в километрах $l = R\,\mathrm{arctg}2$.

Икосаэдр имеет максимальное число вершин из всех правильных многогранников с треугольными гранями. Длина стороны грани икосаэдра, вписанного в земную сферу, равняется $l \approx 7076$ км. В соответствии с кривой, представленной на рис. 2, такая система наблюдений будет регистрировать тремя и большим количеством станций землетрясения с магнитудой ~5 и выше. Чтобы получить систему с меньшими минимальными базами, разобьем сферические треугольники на четыре части следующим образом. Соединим между собой в каждом треугольнике по дуге большого круга середины его сторон. В результате получим разбиение каждого треугольника на четыре треугольника со сторонами ~3538 км. Продолжая указанную процедуру разбиения, получим систему наблюдений с еще меньшими базами. В общем случае при n-кратном разбиении сферического многогранника, порожденного икосаэдром, имеем $f_n = 20 \times 4^n$ – граней, $k_n = 30 \times 4^n$ – ребер и $e_n = 10 \times 4^n + 2$ – вершин. Четырехкратное разбиение приводит к системе с базами ~442 км, имеющей 2562 точки наблюдений. Ортогональная проекция полусферы с такой системой на плоскость представлена на рис. 3. Полученная система при увеличении приборов 40 тыс. будет регистрировать без пропусков землетрясения с магнитудой ~4, а с увеличением приборов 200 тыс. – с магнитудой ~3.5. Если рассматривать Землю как шар, то точки такой системы представят собой вершины многогранника в каждой вершине которого, за исключением двенадцати вершин, совпадающих с вершинами исходного икосаэдра, сходятся шесть треугольников, а в двенадцати вершинах – пять равнобедренных треугольников. Если же учитывать эллиптичность Земли, то полученный в результате построений многогранник будет иметь все грани, отличные от равносторонних треугольников, но при этом останется истинным многогранником.

Понятно, что указанная система определяется неоднозначно, а с точностью до произвольного поворота вокруг любой из трех, произвольно выбранных, взаимно перпендикулярных осей, проходящих через центр шара. Целесообразно выбрать систему таким образом, чтобы как можно больше точек системы совпало или, по крайней мере, было близко к существующим точкам наблюдений. Для этого рассмотрим функционал

$$L = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} [(\varphi_i - \varphi_j)^2 + (\lambda_i - \lambda_j)^2 + \varepsilon_i]^{-1},$$

где φ_i, λ_i – координаты существующих точек наблюдений; n – число существующих точек наблюдений; φ_j, λ_j – координаты планируемых точек наблюдений; m – число планируемых сейсмических станций; ε_i – положительные числа ($\varepsilon_i > 0$). Задача определения координат φ_i, λ_i заключается в максимизации функционала L, причем суммирование можно проводить только по индексам близлежащих точек. Значения ε_i выбираются таким образом, чтобы предпочтение отдавалось точкам $M_i = \{\bar{\varphi}_i, \bar{\lambda}_i\}$ и $M_j = \{\varphi_j, \lambda_j\}$, совпадающим с заданной точностью друг с другом. Эта точность и определяет значения величин ε_i.

Для определения максимума функционала L можно использовать процедуру перебора точек из области θ на земной поверхности, которая вырезается некоторым телесным углом Ω. Угол Ω выбирается из следующих соображений. Любая существующая сейсмическая станция попадает в один из сферических треугольников, полученных в результате разбиения граней сферического икосаэдра. Вокруг каждого треугольника можно описать окружность радиусом $r \approx l/\sqrt{3}$. Эта окружность вырезает в сфере радиусом R конус с углом при вершине, равным $\alpha = 2\arcsin(r/R)$. Таким образом мы покроем всю поверхность шара, если будем варьировать приращения полярных координат в пределах: $\delta\varphi \in [0, \alpha]$, $\delta\theta \in [0, \alpha]$.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Оптимальные системы телесейсмических наблюдений для случаев определения только координат гипоцентров землетрясений и определения координат гипоцентров и времени возникновения землетрясения для $n > 3$ совпадают и представляют собой покрытие земного шара треугольниками, в вершинах которых расположены точки наблюдений. Эти треугольники почти на всей поверхности шара образуют шестиугольники, в вершинах и центрах которых расположены точки наблюдений, а в двенадцати областях эти треугольники образуют пятиугольники, центры которых совпадают с вершинами исходного икосаэдра. В то же время оптимальная сейсмологическая сеть на плоскости представляет собой покрытие плоскости также шестиугольниками с точками наблюдений в их центрах (Бурмин, Ахметьев (в печати)). Таким образом, оптимальные системы сейсмологических наблюдений на шаре и на плоскости совпадают почти для всей Земли, кроме двенадцати областей. Размеры этих областей зависят от кратности разбиения исходного икосаэдра. Чем больше кратность разбиения, тем меньше эти области. Если в качестве исходного правильного многогранника взять октаэдр или тетраэдр, то таких областей будет соответственно шесть и четыре, но в них треугольники будут образовывать четырехугольники и треугольники соответственно. Понятно, что при проектировании оптимальных систем наблюдений желательно, чтобы национальные и региональные сети входили в глобальную сеть как ее составная часть.

Бóльшая часть точек наблюдений (около 1700) оптимальной сейсмологической сети для земного шара приходится на моря и океаны. Важность проведения наблюдений не только на суше, но и на дне морей и океанов не может вызывать сомнений, а технические трудности, связанные с организацией долговременных наблюдений в океанах, кроме, может быть, арктических областей, вполне преодолимы. Кроме сейсмологических наблюдений в этих точках можно проводить наблюдения и других геофизических полей.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Антонова Л.В., Аранович З.И., Кондорская Н.В.* Магнитуда и эффективность станций в связи с проблемой оптимизации сейсмических наблюдений // В сб. Магнитуда и энергетическая классификация землетрясений. – М.: ИФЗ АН СССР. 1974. Т. 2. С. 195 - 202.
2. *Бурмин В.Ю.* Задача планирования эксперимента и обусловленность систем линейных алгебраических уравнений // Изв. АН СССР. Техническая кибернетика. 1976. № 2. С. 195 - 200.
3. *Бурмин В.Ю.* Оптимальное расположение сейсмических станций при регистрации близких землетрясений // Изв. АН СССР. Физика Земли. 1986. № 5. С. 34 - 42.

4. *Бурмин В.Ю., Ахметьев В.М.* Погрешности в определении параметров гипоцентров близких землетрясений и эффективность системы сейсмологических наблюдений // Вулканология и сейсмология. 1994. № 2. С. 109 - 128.
5. *Волынский Б.А.* Сферическая тригонометрия. М.: Наука, 1977. 134 с.
6. *Закатов П.С.* Курс высшей геодезии. М.: Недра, 1964. 504 с.
7. Инструкция о порядке производства и обработки наблюдений на сейсмических станциях ЕССН СССР / Отв. составители: Кондорская Н.В., Аранович З.И. и др. М.: Наука, 1981. 272 с.
8. *Фаддеев Д.К., Фаддеева В.Н.* Вычислительные методы линейной алгебры. М.: Физматгиз, 1963. 734 с.
9. *Фейш Тот Л.* Расположение на плоскости, на сфере и в пространстве. М.: Физматгиз, 1958. 364 с.
10. *Худсон Д.* Статистика для физиков. М.: Мир, 1970. 296 с.