



## ОБРАЩЕНИЕ ГОДОГРАФОВ СЕЙСМИЧЕСКИХ ВОЛН, РАСПРОСТРАНЯЮЩИХСЯ В ВЕРТИКАЛЬНО-НЕОДНОРОДНЫХ СРЕДАХ

**В.Ю. Бурмин**

*Институт физики Земли им. О.Ю. Шмидта РАН,  
123995 ГСП-5, Москва, Д-242, ул. Бол. Грузинская, 10, Россия, e-mail: burmin@ifz.ru*

Дан обзор обратных кинематических задач сейсмологии для упругого полупространства и методов их решения, рассмотренных автором ранее. Первая задача – это обращение разрывных годографов рефрагированных волн. Для решения этой задачи получена система двух интегральных уравнений Фредгольма первого рода, решение которых сводится к задаче квадратичного программирования в классе кусочно-монотонных функций. Вторая задача – это обращение годографа сейсмической волны, распространяющейся от глубинного источника вверх. Третья задача – обращение годографа волны, отраженной от плоской границы. Эта задача аналогична второй. Четвертая задача – обращение годографа общей точки отражения (ОТО) сейсмической волны для среды с криволинейной границей. Определяется распределение скорости над границей, глубина и наклон границы в ОТО сейсмической волны. Пятая задача связана с обращением разности годографов продольной волны и обменной поперечной волны. Ее решение ищется в классе монотонных функций и результатом решения является глубина залегания границы обмена и распределение скоростей  $P$ - и  $S$ -волн в указанном классе функций. Шестая задача – сглаживание наблюдаемых годографов сейсмических волн выпуклыми кубическими сплайнами.

*Обратные кинематические задачи сейсмологии, годограф, рефрагированные волны, отраженные волны, обменные волны, выпуклые сплайны*

### INVERSION OF TRAVELTIMES FOR SEISMIC WAVES PROPAGATING IN VERTICALLY INHOMOGENEOUS MEDIA

**V.Yu. Burmin**

*Schmidt Institute of Physics of the Earth, Russian Academy of Sciences,  
D-242, Bol. Gruzinskaya str., 10, Moscow, 123995 GSP-5, Russia, e-mail: burmin@ifz.ru*

The article provides an overview of the inverse kinematic problem of seismology for the elastic half-space, and methods for their solution discussed by the author. The first problem – it's inversion of discontinuous hodographs refracted waves. To solve the problem inversion discontinuous hodographs refracted waves, a system of two Fredholm integral equations of the first kind whose solution reduces to a quadratic programming in the class of piecewise monotone functions. The second problem – this appeal locus of seismic waves propagating from a deep source of upward. The third problem – the inversion of the hodograph of the wave reflected from a plane boundary. This problem is similar to the second. The fourth problem – this inversion of travel-time of common point of reflection (CPR) of a seismic wave for a medium with curved boundary. Determined by the velocity distribution over the boundary, depth and inclination of the boundaries in general relativity seismic waves. The fifth problem relates to the inversion difference in travel-time curves of the longitudinal wave and transverse wave exchange. Solution of the problem in the class of monotone functions and the result is a solution of the depth of the boundary of the exchange and distribution of velocities of  $P$ - and  $S$ -waves in the class of functions. The sixth task – smoothing the observed travel-time curves of seismic waves by convex cubic splines.

*Inverse kinematic problem of seismics, travel-time, refracted waves, reflected waves, converted waves, convex splines*

### ВВЕДЕНИЕ

Из многочисленных геофизических методов сейсмические методы исследования Земли, основанные на изучении распространения сейсмических волн в упругой среде, позволяют получать наиболее полные и детальные сведения о структуре геологических сред. К методам определения скоростей распространения сейсмических волн в Земле в настоящее время можно отнести методы, базирующиеся на анализе времен пробега сейсмических волн и, в частности, обращении сейсмических годографов.

Несмотря на то что в настоящее время бурно развиваются методы численного решения обратных многомерных кинематических задач сейсмологии или, как принято говорить, методы сейсмической томографии, определение скоростей распространения сейсмических волн в предположении об изменении скоростей только с глубиной остается весьма актуальным. Прежде всего это связано с тем, что задачи сейсмической томографии предполагают задание некоторого начального приближения скоростной модели среды.

При этом, чем ближе начальное приближение к истинной модели среды, тем лучше сходимость решения в задаче томографии к окончательной модели. Кроме этого восстановление скоростных характеристик методом сейсмической томографии основывается, как правило, на использовании только рефрагированных волн и не дает возможность определять границы раздела в упругой среде. В то же время обращение годографов отраженных и обменных волн позволяет определять положение резких границ в среде и распределение скорости в классе монотонных скоростных функций. Более того, если имеем некоторую площадную систему сейсмических наблюдений, то, получая положение границы обмена под каждой станцией, можно по набору сейсмических событий на различных эпицентральных расстояниях построить трехмерное распределение соответствующей сейсмической границы и скоростей продольных и поперечных волн.

Определение скоростей сейсмических волн в Земле основано главным образом на анализе времен пробега сейсмических волн и, в частности, обращении сейсмических годографов. Годографы представляют собой зависимость времен распространения упругих колебаний от эпицентральных расстояний (горизонтальный годограф) или от разности глубин источников и приемников (вертикальный годограф). Поскольку скорости распространения сейсмических волн в упругой среде определяют времена пробега колебаний от источников до приемников, то задачу нахождения скоростных характеристик среды можно рассматривать как задачу обращения совокупности сейсмических годографов, пренебрегая малыми изменениями амплитуды и формы колебаний в сейсмической волне.

Существующие методы решения обратных кинематических задач, и в частности интерпретация годографов, основываются на представлениях геометрической сейсмологии [1–3]. Условия применимости метода определяют ограничения, которым должны удовлетворять упругие среды, и возмущения, распространяющиеся в этих средах, по сути дела определяют разрешающую способность метода. Как известно, необходимым условием применимости лучевого метода – малость отношения длины волны возмущения к характерным размерам неоднородностей среды. Рассмотрение достаточных условий проводится на эвристическом уровне на основе представлений об объемах Френеля. Эти условия заключаются в том, что параметры среды, а также параметры волны (амплитуда и градиент фазы) не должны заметно изменяться в поперечном сечении френелевского объема [3].

В зависимости от типа рассматриваемых волн (рефрагированные, отраженные, обменные, дифрагированные), математической модели среды, характера исходных данных возможны различные постановки обратных кинематических задач сейсмологии и, соответственно, различные подходы к их решению.

Впервые строгое рассмотрение задачи обращения сейсмического годографа от поверхностного источника было проведено в начале нашего века Г. Герглотцем [4], Е. Вихертом [5] и Г. Бейтманом [6] для сферически симметричной Земли. Ими было показано, что если  $u(r) = r/v(r) > 0$  является монотонной возрастающей функцией, где  $v(r)$  – скорость распространения сейсмической волны на расстоянии  $r$  от центра Земли, то  $v(r)$  однозначно определяется по годографу  $t(\psi)$  сейсмической волны, наблюдаемому на поверх-

ности Земли. Для определения функции  $v(r)$  была получена формула обращения сейсмического годографа, которая имеет вид

$$\ln \frac{R_3}{r} = \frac{1}{\pi} \int_0^{\psi_1} \operatorname{arch} \left[ \frac{\alpha(\psi)}{\beta(\psi_1)} \right] d\psi,$$

где  $R_3$  – радиус Земли;  $\psi_1$  – угловое расстояние от источника упругих колебаний до точки их приема, соответствующее лучу с параметром  $\beta = \frac{dt}{d\psi} \Big|_{\psi=\psi_1}$ ;  $\alpha(\psi)$  – текущее значение лучевого параметра ( $\psi_1 \geq \psi \geq 0$ ).

Первоначально формула обращения использовалась для определения скорости распространения сейсмических волн в Земле от землетрясений. Однако в начале 30-х годов прошлого века метод, предложенный Г. Герглотцем и Е. Вихертом, стал применяться в сейсморазведке в предположении, что скорость распространения сейсмических волн в упругой среде меняется только с глубиной. К этому периоду относятся работы [7–9].

Л. Слехтер [7] рассмотрел случай, когда годограф сейсмической волны имеет разрывы, связанные с наличием в упругой среде слоя пониженной скорости (волновод). Он показал, что слои в волноводе можно переставлять (времена прихода сейсмических волн, регистрируемых на поверхности Земли, при этом не меняются), и нашел верхнюю границу мощности волновода.

С.В. Чибисовым [8, 9] была получена формула обращения годографа рефрагированной волны, распространяющейся в среде с плоскопараллельным распределением скорости со скачками на границах слоев.

Тем не менее из-за вычислительных трудностей этот метод не нашел широкого применения до появления быстродействующих электронных вычислительных машин в начале 60-х годов прошлого века, когда начался новый этап развития методов решения обратной одномерной кинематической задачи сейсмологии.

Большое внимание решению обратных кинематических задач уделено в работах [10–13]. В них установлена эквивалентность одномерной задачи для круга и горизонтально-однородного полупространства и даны формулы конформного преобразования круга в полуплоскость  $(x, y)$ :

$$x = R_3 \psi, \quad z = R_3 \ln \frac{R_3}{r}, \quad v(z) = R_3 \frac{v(r)}{r}.$$

Получена формула обращения сейсмического годографа для упругой среды с волноводами в предположении, что скорость в волноводах задана

$$z(\beta) = \frac{1}{\pi} \left\{ \int_{\beta_0}^{\beta} \frac{x(\alpha) d\alpha}{\sqrt{\alpha^2 - \beta^2}} + \sum_{i=1}^k \int_{z_i}^{\bar{z}_i} \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{v^{-2}(z) - \alpha_i^2}{\alpha_i^2 - \beta_i}} dz \right\},$$

где  $z(\beta)$  – глубина максимального проникновения луча с параметром  $\beta$ ;  $\beta_0 = v^{-1}(0)$ ;  $\bar{z}_i$  и  $z_i$  – глубины верхней и нижней границ  $i$ -го волновода;  $v(z)$  – скорость в  $i$ -м волноводе;  $\alpha_i = v^{-1}(z_i - 0)$ . Ими было показано, что, если в среде имеются слои пониженной скорости, то скорость распространения сейсмических волн в волноводе и ниже определяется неоднозначно.

В работе В.М. Маркушевича, Е.Л. Резникова [14] для уменьшения неоднозначности решения вводится ограничение снизу на скорость в волноводе. Э.Н. Бессоновой и др. [15, 16] на основе исследований

М.Л. Гервера и В.М. Маркушевича был предложен  $\tau$ -метод решения обратной кинематической задачи сейсмологии. Этот метод позволяет определять некоторую полосу, которой принадлежат все решения задачи, удовлетворяющие наблюдаемому годографу.

В.С. Гейко [17–19] исследовал вопрос неединственности решения обратной кинематической задачи сейсмологии, основываясь на аналитическом продолжении сейсмического годографа. Им показано, что для достаточно широкого класса скоростных функций множество решений задачи является “слихтеровым”, т. е. скоростная функция вне волноводов определяется однозначно, а в волноводах – с точностью до перестановки элементарных слоев в волноводе. При этом однозначно определяются минимальное значение скорости в волноводе и мощность волновода.

Практическое использование формул обращения сейсмических годографов, несмотря на достаточно хорошо развитую теорию, затруднено тем, что они не применимы к реальным годографам, полученным из наблюдений, так как последние практически никогда не удовлетворяют условию разрешимости задачи, а сама обратная кинематическая задача сейсмологии существенно некорректна [20]. Чтобы убедиться в этом, рассмотрим математическую постановку задачи. Пусть область  $D$  в плоскости  $XZ$  с границей  $S$  и с распределением скорости распространения упругих (сейсмических) волн  $v = v(z)$ . Пусть в некоторой точке  $M$  области  $D$  ( $M \in D \cup S$ ) в момент времени  $t_0$  начинает действовать источник упругих колебаний, а на границе  $S$  области  $D$  регистрируются времена прихода этих колебаний, которые могут быть вычислены с помощью некоторой совокупности операций явно или неявно, т. е. на границе  $S$  области  $D$  задан годограф  $t = t(S)$  сейсмической волны. Рассмотрим множество  $V$  скоростных функций и соответствующее ему множество годографов  $T$  сейсмических волн. Определим на этих множествах меру близости элементов (расстояний)  $\rho_V(v_1, v_2)$  и  $\rho_T(t_1, t_2)$ . Тогда обратная задача (определение скорости  $v = v(z)$  по заданному годографу  $t = t(S)$ ) заключается в решении операторного уравнения

$$Av = t, v \in V, t \in T,$$

где  $A$  – оператор, осуществляющий отображение множества  $V$  на множество  $T$ , т. е. в определении обратного отображения  $T \rightarrow V$ .

Задача определения  $V$  по  $T$  называется корректно поставленной по Адамару, если она удовлетворяет следующим условиям [20]: 1) для всякого  $t \in T$  существует решение  $v \in V$ ; 2) это решение единственно; 3) решение  $v$  непрерывно зависит от  $t$  (устойчивость  $v$  относительно малых вариаций  $t$ ). Если задача не удовлетворяет хотя бы одному из перечисленных условий, то она называется некорректной.

Выше отмечалось, что решение обратной кинематической задачи сейсмологии в общем случае, например для сред с волноводами, неединственное. Следовательно, не выполняется второе условие корректности задачи.

Записанное выше операторное уравнение имеет решение только для тех элементов  $t$ , которые принадлежат множеству  $N = AV$ , где  $N$  – образ множества  $V$  при отображении, осуществляемом оператором  $A$ . Элемент  $t$  обычно получается из наблюдений и поэтому известен приближенно. Погрешности  $\delta$  в определении  $t$  практически всегда выводят за пределы мно-

жества  $N$ . Более того, реальные годографы обычно не удается уверенно проследить в последующих вступлениях и на больших расстояниях от источника. Очевидно, что выпадающие участки годографа представляют собой отображение определенных подобластей области  $D$ . Кроме этого элемент  $t$  может не принадлежать образу множества  $V$  из-за неадекватности математической модели и описываемой ею реальной среды. Таким образом, для элемента  $t$ , полученного из наблюдений, как правило, решения в обычном смысле не существует на множестве  $V$ , так как  $t$  не принадлежит множеству  $N$ . В этом случае говорят о квазирешении уравнения (4), т. е. таком элементе  $\tilde{v} \in V$ , который минимизирует при данном  $t$  функционал  $\rho_T(Av, t)$  на множестве  $V$  [20].  $\rho_T(Av, t)$  есть отклонение правой и левой частей в соответствующем уравнении друг от друга. Квазирешение  $\tilde{v}$  может быть неединственным.

Для определения квазирешения обратной кинематической задачи широко используются методы оптимизации и близкий к ним по сути метод математического перебора [21–29]. Суть этих методов заключается в подборе такой скоростной модели среды, для которой теоретические годографы наилучшим образом совпадают с экспериментальными годографами.

Решение обратной кинематической задачи методами оптимизации и математического перебора достаточно полно описаны Н.Н. Матвеевой [24]. Как отмечает автор, главные недостатки этих методов следующие: 1) решение задачи может существенно зависеть от типа выбранной модели среды и способа параметризации скоростного разреза; 2) при подборе разреза, наилучшим образом удовлетворяющего экспериментальному годографу, отсутствуют четкие критерии перебора значений параметров.

Рефрагированные (преломленные) волны, как правило, уверенно прослеживаются только в первых вступлениях, и годографам первых вступлений волн соответствует обычно незначительное их проникновение в глубь слоев, особенно при малых градиентах скорости в слоях. Вследствие этого по годографам первых вступлений определяется распределение скорости сейсмических волн только в самых верхних частях соответствующих слоев. Более полную информацию о распределении скоростей сейсмических волн можно получить, если привлечь к интерпретации годографы отраженных волн. Вопросы существования и единственности решения обратной кинематической задачи отраженных волн рассматривались в работах [17, 18, 27, 29, 30]. Различные подходы численного решения задачи обращения годографа отраженной волны приведены в публикациях [27–34].

Один из важных вопросов в теории обращения сейсмических годографов – дифференцирование сейсмического годографа, заданного с погрешностями дискретным набором точек. А.Н. Тихоновым и В.Я. Арсениным [20] установлено, что задача дифференцирования известной приближенно функции не обладает свойством устойчивости и это приводит к большим затруднениям при приближенном вычислении производных. При обращении сейсмических годографов задача осложняется тем, что, например, для вертикально-неоднородной среды годограф может быть представлен как совокупность конечного числа простых кривых, которые на участках монотонности обращены выпуклостью вверх или вниз, но экспериментальные годографы в силу случайных погрешностей и

неоднородности реальных упругих сред в горизонтальных направлениях практически никогда не удовлетворяют этим условиям. Поэтому формулы обращения оказываются неприменимыми к реальным годографам. Вопросы дифференцирования экспериментального годографа рассматривались Е. Arnold [35] и др.

В настоящей работе представлен обзор обратных кинематических задач сейсмологии для упругого полупространства и методов их решения, рассмотренных автором ранее. Первая задача – это обращения разрывных годографов рефрагированных волн. Как известно, разрывы годографов рефрагированных волн могут быть связаны с тремя причинами. Первая причина – это наличие в упругой среде скачка скорости. Вторая – наличие в среде слоя с постоянной скоростью. И третья причина – присутствие в среде слоя с пониженной скоростью (СПС). Первая задача была решена в 30-х годах прошлого столетия С.В. Чибисовым. Второй случай ранее никем не рассматривался. Третий случай был изучен М.Л. Гервером и В.М. Маркушевичем. Полученное ими решение при условии, что распределение скорости сейсмических волн и мощность СПС известны, по сути, сводится к решению С.В. Чибисова.

Для решения задачи обращения разрывных годографов рефрагированных волн получена система двух интегральных уравнений Фредгольма первого рода, решение которых сводится к задаче квадратичного программирования в классе кусочно-монотонных функций, т. е. функций, монотонных на выделенных сегментах оси  $Z$ . В этом случае при наличии волноводов однозначно определяются их мощности, минимальные значения скорости в них и скорость сейсмических волн вне волноводов.

Вторая задача – это обращение годографа сейсмической волны, распространяющейся от глубинного источника вверх. В этом случае получено уравнение Фредгольма первого рода, решение которого также сводится к задаче квадратичного программирования в классе монотонных функций. В этом случае однозначно определяются глубина источника и минимальное и максимальное значения скорости выше источника.

Третья задача – обращение годографа волны, отраженной от плоской границы. Эта задача аналогична второй с той лишь разницей, что в уравнениях годографа входит коэффициент 2.

Четвертая задача – это обращение годографа общей точки отражения (ОТО) сейсмической волны для среды с криволинейной границей. Для решения этой задачи получено уравнение Фредгольма первого рода, решение которого также сводится к задаче квадратичного программирования в классе монотонных функций, но при этом определяется еще наклон границы в ОТО сейсмической волны.

Пятая задача связана с обращением разности годографов продольной волны и обменной поперечной волны. Рассматривается ситуация, при которой  $P$ -волна, падая снизу на границу слоя, возбуждает обменную  $SV$ -волну, которая вместе с  $P$ -волной регистрируется на дневной поверхности сейсмическими приемниками. Для решения этой задачи, как и в первом случае, получена система двух интегральных уравнений Фредгольма первого рода. Решение задачи ищется в классе монотонных функций и результатом решения является глубина залегания границы обмена и распределение скоростей  $P$ - и  $S$ -волн в указанном классе функций.

Шестая задача – сглаживание наблюдаемых годографов сейсмических волн выпуклыми кубическими сплайнами. Практическое использование формул обращения сейсмических годографов сталкивается с той трудностью, что они не применимы к реальным годографам, полученным из наблюдений, так как последние практически никогда не удовлетворяют условию разрешимости задачи. Чтобы получить решение задачи с помощью формул обращения, строится выпуклый кубический сплайн, который уже удовлетворяется требованиям разрешимости задачи. При этом кубические сплайны являются наилучшим аппаратом для аппроксимации сейсмического годографа, поскольку сплайны более низкого порядка не обеспечивают достаточной точности аппроксимации, а сплайны более высокого порядка не обеспечивают выпуклости аппроксимирующей функции.

### ОБРАЩЕНИЕ РАЗРЫВНЫХ ГОДОГРАФОВ РЕФРАГИРОВАННЫХ ВОЛН

Запишем параметрическое уравнение годографа рефрагированной волны, распространяющейся в вертикально-неоднородной среде:

$$x(p) = 2p \int_0^{z^*} \frac{dz}{\sqrt{v^2(z) - p^2}},$$

$$t(p) = 2 \int_0^{z^*} \frac{dz}{v^*(z) \sqrt{v^2(z) - p^2}},$$

где  $v(z)$  – скорость распространения сейсмической волны;  $p$  – параметр луча, численно равный производной годографа в соответствующей точке.

Пусть годограф имеет разрыв, связанный с наличием в среде слоя с пониженной скоростью (волновода). Рассмотрим задачу определения скоростной функции  $v = v(z)$  на интервале  $[0, z_M]$  по годографу рефрагированной волны. Будем искать решение задачи на множестве  $V$  положительных, дважды кусочно-гладких, ограниченных скоростных функций  $v(z) \in V$ , определенных на сегменте  $[0, z_M]$ ,  $z_M \leq H < \infty$ . Будем полагать, что число разрывов годографа конечно. Пусть первая ветвь годографа начинается в точке  $(0,0)$  (что, вообще говоря, не обязательно). Тогда по формулам обращения годографа Герглота–Вихерта–Чибисова по первой ветви годографа можно восстановить скоростную кривую до некоторой глубины  $z^*$ . Пересчитаем оставшиеся ветви годографа на уровень  $z^*$ . Будем иметь

$$x(p, z^*) = x(p) - 2p \int_0^{z^*} \frac{dz}{\sqrt{u^2(z) - p^2}} =$$

$$= 2p \left\{ \int_{z^*}^{z^*} + \int_{z^*}^{z(p)} \right\} \frac{dz}{\sqrt{u^2(z) - p^2}},$$

$$t(p, z^*) = t(p) - 2 \int_0^{z^*} \frac{u^*(z) dz}{\sqrt{u^2(z) - p^2}} =$$

$$= 2 \left\{ \int_{z^*}^{z^*} + \int_{z^*}^{z(p)} \right\} \frac{u^*(z) dz}{\sqrt{u^2(z) - p^2}}.$$

Здесь  $u(z) = v^{-1}(z)$ . Будем называть величину  $u(z)$  показателем преломления.

Рассмотрим вторую ветвь годографа. Кривая  $t(x)$  (после пересчета) будет иметь вид, показанный, например, на рис. 1.

Как известно, в волноводе существует бесконечное множество скоростных функций, которые удовлетворяют наблюдаемому годографу. Рассмотрим в волноводе функцию  $H(u) = \text{mes} \{z : z \in [z^*, \bar{z}^*], v^{-1}(z) \leq u\}$ . По определению функция  $H(u)$ : а) не убывает; б) равна нулю при  $-\infty < u \leq \bar{u}^*$ ; в) равна  $h = \bar{z}^* - z^*$  при  $u^* \leq u < \infty$ . Здесь  $\bar{u}^*$  – минимальное значение показателя преломления в волноводе;  $u^*$  – максимальное значение показателя преломления в волноводе.

Поскольку вне волновода функция  $u = u(z)$  строго убывающая, то, следовательно, существует обратная функция  $z = z(u)$ .

В этом случае уравнения годографа могут быть записаны в виде суммы интегралов Римана и Стильбеса [36]

$$\begin{aligned} x(p, z^*) &= 2p \left\{ \int_p^{q_0} \frac{\lambda(u) du}{\sqrt{u^2 - p^2}} + \int_{\bar{u}^*}^{u^*} \frac{dH(u)}{\sqrt{u^2 - p^2}} \right\}, \\ t(p, z^*) &= 2 \left\{ \int_p^{q_0} \frac{\lambda(u) u^2 du}{\sqrt{u^2 - p^2}} + \int_{\bar{u}^*}^{u^*} \frac{dH(u)}{\sqrt{u^2 - p^2}} \right\}, \end{aligned} \quad (1)$$

где  $\lambda(u) = -dz/du \geq 0$ ,  $dH(u) \geq 0$ .

Умножим правую и левую части первого уравнения из (1) на  $1/\sqrt{w^2 - p^2}$  и проинтегрируем в пределах от  $q$  до  $q_0$ . Тогда будем иметь

$$\int_q^{q_0} \frac{x(p, z^*) dp}{\sqrt{w^2 - p^2}} = \int_q^{q_0} \frac{2p}{\sqrt{w^2 - p^2}} \left\{ \int_p^{q_0} \frac{\lambda(u) du}{\sqrt{u^2 - p^2}} + \int_{\bar{u}^*}^{u^*} \frac{dH(u)}{\sqrt{u^2 - p^2}} \right\} dp,$$

где  $q \leq p \leq q_0 \leq \bar{u}^* \leq w \leq u^*$ .

Меняя местами внутренние и внешний интегралы в соответствии с правилом Дирихле (область интегрирования показана на рис. 2), получим:

$$\begin{aligned} & \int_q^{q_0} \frac{x(p, z^*) dp}{\sqrt{w^2 - p^2}} = \\ &= \int_q^{q_0} \frac{2p}{\sqrt{w^2 - p^2}} \left\{ \int_p^{q_0} \frac{\lambda(u) du}{\sqrt{u^2 - p^2}} + \int_{\bar{u}^*}^{u^*} \frac{dH(u)}{\sqrt{u^2 - p^2}} \right\} dp \\ &= \int_q^{q_0} \lambda(u) \int_q^{u^*} \frac{2p dp}{\sqrt{(u^2 - p^2)(w^2 - p^2)}} du + \\ &+ \int_{\bar{u}^*}^{u^*} dH(u) \int_q^{q_0} \frac{2p dp}{\sqrt{(u^2 - p^2)(w^2 - p^2)}} = \\ &= \int_q^{q_0} \lambda(u) K_1(u, w) du + \int_{\bar{u}^*}^{u^*} K_2(u, w) dH(u), \end{aligned} \quad (2)$$

где

$$K_1(u, w) = 2 \ln \frac{\sqrt{w^2 - q^2} + \sqrt{u^2 - q^2}}{\sqrt{w^2 - u^2}}, \quad q \leq u \leq q_0 \leq \bar{u}^* \leq w \leq u^*;$$

$$K_2(u, w) = 2 \ln \frac{\sqrt{w^2 - q^2} + \sqrt{u^2 - q^2}}{\sqrt{w^2 - q_0^2} + \sqrt{u^2 - q_0^2}}, \quad q \leq q_0 \leq u^* \leq u, w \leq u^*.$$

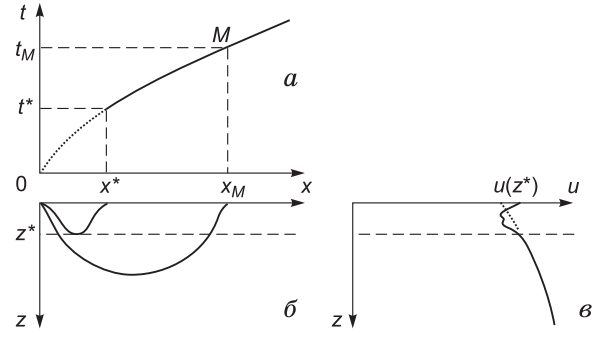


Рис. 1. Фрагмент годографа (а) рефрагированных волн и сейсмические лучи (б) для упругой среды с произвольным изменением скорости в верхней части разреза (θ).

Умножим правую и левую части второго уравнения из (1) на  $p/\sqrt{w^2 - p^2}$  и также проинтегрируем в пределах от  $q$  до  $q_0$ . В результате будем иметь

$$\int_q^{q_0} \frac{t(p, z^*) p dp}{\sqrt{w^2 - p^2}} =$$

$$= \int_q^{q_0} \lambda(u) u^2 K_1(u, w) du + \int_{\bar{u}^*}^{u^*} u^2 K_2(u, w) dH(u).$$

Таким образом, мы получили систему из двух интегральных уравнений Фредгольма первого рода относительно двух функций  $\lambda(u)$  и  $H(u)$ , которые должны удовлетворять условиям

$$\lambda(u) \geq 0, \quad dH(u) \geq 0. \quad (4)$$

Для решения уравнений (2) и (3) сегмент  $[q, q_0]$  разбивается  $(N + 1)$  точками на  $N$  частичных сегментов. На каждом частичном сегменте функция  $\lambda(u)$  считается равной положительной константе  $\lambda_j$  ( $j = 1, 2, \dots, N$ ). Сегмент  $[\bar{u}^*, u^*]$  также разбивается  $(N + 1)$  точками на  $N$  частичных сегментов. На сегменте  $[\bar{u}^*, u^*]$  рассматривается функция скачков  $\Delta H_j$  ( $j = 1, 2, \dots, N$ ). Тогда уравнения (2) и (3) запишутся в виде системы из  $2N$  уравнений, линейных относительно  $2N - 2$  неизвестных  $\lambda_j$  и  $\Delta H_j$  и нелинейных относительно двух неизвестных  $w_1 = u^*$  и  $w_N = \bar{u}^*$ . Численное решение этой задачи рассмотрено в статье [36].

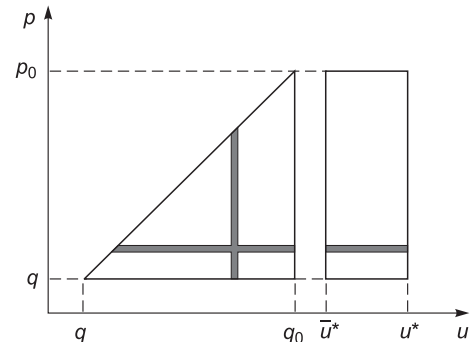


Рис. 2. Область интегрирования в задаче обращения разрывного годографа рефрагированных волн.

### ОБРАЩЕНИЕ ГОДОГРАФА СЕЙСМИЧЕСКОЙ ВОЛНЫ, РАСПРОСТРАНЯЮЩЕЙСЯ ОТ ГЛУБИННОГО ИСТОЧНИКА ВВЕРХ

Рассмотрим случай, когда источник упругих колебаний расположен на некоторой глубине  $z^* > 0$  [37]. Предположим, что распределение скорости сейсмической волны выше источника и глубина источника неизвестны. Запишем уравнения годографа для сейсмических волн, идущих вверх от источника (рис. 3, участок  $[0, x^*]$ )

$$\begin{aligned} x_1(p) &= p \int_0^{z^*} \frac{dz}{\sqrt{v^{-2}(z) - p^2}}, \\ t_1(p) &= \int_0^{z^*} \frac{dz}{v^*(z) \sqrt{v^{-2}(z) - p^2}}. \end{aligned} \quad (5)$$

Запишем функцию  $x_1(p)$  из (5) в виде интеграла Стильеса

$$x_1(p) = p \int_{u^*}^{u_0} \frac{dH(u)}{\sqrt{u^2 - p^2}}, \quad (6)$$

где  $0 \leq p \leq u^* \leq u \leq u_0$ ;  $dH(u) \geq 0$ , т. е.  $H(u)$  – монотонная функция.

Поставим задачу, определить функцию  $H(u)$  и, следовательно, глубину источника и минимальное и максимальное значения скорости в слое над источником. Напомним, что функция  $H(u)$ : а) не убывает; б) равна нулю при  $-\infty < u \leq u^* = u(z^*)$ ; в) равна  $h = z^*$  при  $u(0) = u_0 \leq u < \infty$ . Здесь  $u^*$  и  $u_0$  – минимальное и максимальное значения  $u(z) = v^{-1}(z)$  в слое над источником соответственно.

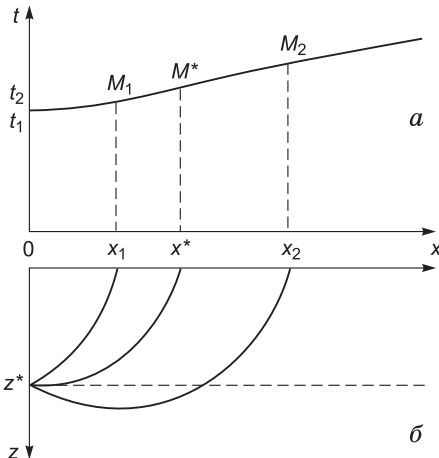
В качестве решения уравнения (6) будем рассматривать такую функцию  $H(u)$ , которая минимизирует функционал

$$J(H, x) = u \int_0^{u^*} \frac{1}{p} \left\{ x_1(p) - p \int_{u^*}^{u_0} \frac{dH(u)}{\sqrt{u^2 - p^2}} \right\}^2 dp \quad (7)$$

и удовлетворяет условию

$$dH(u) \geq 0. \quad (8)$$

Таким образом, задача определения функции  $u(z) = v^{-1}(z)$  по годографу волны, распространяющейся вверх от глубинного источника, сводится к задаче



**Рис. 3.** Годограф (а) и лучи рефрагированных волн, распространяющихся от глубинного источника (б).

квадратичного программирования в бесконечномерном пространстве, минимизации квадратичного функционала (7) при линейных ограничениях (8).

Необходимым условием минимума функционала  $J(H, x)$  является равенство нулю его первой вариации

$$\delta J = \frac{d}{da} J [H(u) + a\delta H, x]_{a=0}.$$

Проделив соответствующие вычисления, получим, что функция, реализующая минимум функционала  $J(H, x)$ , является решением уравнения

$$\begin{aligned} f(w) &= \int_0^{u^*} \frac{x_1(p) dp}{\sqrt{w^2 - p^2}} = \\ &= 0,5 \int_{u^*}^{u_0} dH(u) \int_0^{u^*} \frac{p dp}{\sqrt{(w^2 - p^2)(u^2 - p^2)}}, \end{aligned} \quad (9)$$

где  $u^* \leq w \leq u_0$ .

Внутренний интеграл в правой части (9) равен

$$\begin{aligned} K(u, w) &= 0,5 \int_0^{u^*} \frac{2p dp}{\sqrt{(w^2 - p^2)(u^2 - p^2)}} = \\ &= \ln \frac{w + u}{\sqrt{w^2 - u^{*2}} + \sqrt{u^2 - u^{*2}}}. \end{aligned}$$

Уравнение (9) можно записать в другом виде. Для этого в левой части уравнения (9) сделаем замену переменных  $\xi = \arcsin(p/w)$  и проинтегрируем полученное выражение по частям. В результате получим

$$\begin{aligned} f(w) &= \int_0^{u^*} \frac{x_1(p) dp}{\sqrt{w^2 - p^2}} = \int_0^{\arcsin \frac{u^*}{w}} x_1(w, \xi) d\xi = \\ &= x_1(u^*) \arcsin \frac{u^*}{w} - \int_0^{x(u^*)} \arcsin \frac{t'(x)}{w} dx \end{aligned}$$

И окончательно приходим к интегральному уравнению Фредгольма первого рода

$$\begin{aligned} f(w) &= x_1(u^*) \arcsin \frac{u^*}{w} - \int_0^{x(u^*)} \arcsin \frac{t'(x)}{w} dx = \\ &= \int_{u^*}^{u_0} \ln \frac{w + u}{\sqrt{w^2 - u^{*2}} + \sqrt{u^2 - u^{*2}}} dH(u) \end{aligned}$$

с симметричным положительным ядром, решение которого ищется на множестве  $\mathfrak{K}(u)$  монотонных функций:  $H(u) \in \mathfrak{K}(u)$ .

Функционал (7) и уравнение (9) соответствуют полному годографу сейсмической волны, распространяющейся вверх от источника. Пределы внешнего интегрирования 0 и  $u^*$  в функционале (7) равны значениям производных годографа в начальной  $x = 0$  и предельной  $x = x^*$  точках годографа  $t = t(x)$ . Однако в силу различных причин, в основном в силу неполноты системы наблюдений, экспериментальные годографы прослеживаются на интервале  $[x_{\min}, x_{\max}]$ , который же интервала  $[0, x^*]$  ( $0 \leq x_{\min}, x_{\max} \leq x^*$ ). Вследствие этого пределы внешнего интегрирования в (7) оказываются равными  $p_1 = t'(x_{\min})$  и  $p_2 = t'(x_{\max})$ .

Пределы  $u^*$  и  $u_0$  внутреннего интеграла в (7) в общем случае также неизвестны, а известны значения величин  $u_{\max} \geq u_0$  и  $u_{\min} = p_2 \leq u^*$ ,  $u_{\max}$  соответствует максимальному значению  $u(z)$  на верхней границе слоя  $0z^*$  и, как правило, всегда может быть задано априори;  $u_{\min} = p_2$  равняется значению производной годографа в крайней правой его точке. В работе [37] дано численное решение задачи, где показано, что в классе монотонных функций скоростная кривая над источником и, следовательно, глубина источника восстанавливаются по любому фрагменту годографа.

#### ОБРАЩЕНИЕ ГОДОГРАФА ОТРАЖЕННОЙ ВОЛНЫ

Уравнения годографа волны, отраженной от границы, расположенной на глубине  $z = z^*$ , с точностью до постоянного множителя 2 совпадает с уравнениями годографа волны, отраженной от границы  $z = z^*$  [38]. Следовательно, определение изменения скорости в слое  $z_0z^*$  и положение границы можно проводить так же, как и в случае годографа волны, распространяющейся вверх от глубинного источника. Разница заключается в том, что в случае глубинного источника годограф соответствует первым вступлениям сейсмических волн и определяется достаточно надежно во всех точках наблюдений. В случае отраженных волн сейсмические колебания находятся в последующих вступлениях, а их амплитуда существенным образом зависит от коэффициента отражения на соответствующей границе.

#### ОБРАЩЕНИЕ ГОДОГРАФА ОБЩЕЙ ТОЧКИ ОТРАЖЕНИЯ ДЛЯ ВЕРТИКАЛЬНО-НЕОДНОРОДНОЙ СРЕДЫ С КРИВОЛИНЕЙНОЙ ГРАНИЦЕЙ

Рассмотрим вертикально-неоднородную среду, т. е. среду, скорость распространения сейсмических волн в которой меняется только с глубиной  $v = v(z)$ , с криволинейной границей  $z = h(x)$ . Пусть на дневной поверхности регистрируются сейсмические волны, отраженные от одной точки границы  $z = h(x)$ . Тогда годограф ОТО будет иметь вид, показанный на рис. 4, где  $x_1$ ,  $t_1$  и  $x_2$ ,  $t_2$  – точки годографа соответственно слева и справа от точки  $x_0$ ; точка  $x_0$  является точкой минимума годографа, а точка  $X$  – икс-овая координата точки отражения;  $\beta$  – угол наклона касательной к границе в точке отражения, отсчитываемый от горизонтали;  $(\alpha - \beta)$  и  $(\alpha + \beta)$  – углы выхода на дневную поверхность падающего и отраженного лучей. Уравнения годографа для этого случая запишутся в виде

$$X - x(p) = p \int_0^{z^*} \frac{dz}{\sqrt{u^2(z) - p^2}},$$

$$x(q) - X = q \int_0^{z^*} \frac{dz}{\sqrt{u^2(z) - q^2}},$$

$$t(p) = t(q) = \int_0^{z^*} \left\{ \frac{u^2(z)}{\sqrt{u^2(z) - p^2}} + \frac{u^2(z)}{\sqrt{u^2(z) - q^2}} \right\} dz, \quad (10)$$

где  $p$  и  $q$  – параметры лучей справа и слева от точки отражения, равные

$$p = t'_1 = u^0 \sin(\alpha - \beta), \quad q = t'_2 = u^0 \sin(\alpha + \beta); \quad (11)$$

$u(z) = v^{-1}(z)$ ;  $u^0 = 1/v^0$  – величина, обратная скорости на дневной поверхности;  $z^*$  – глубина точки отражения.

Так же как и в случаях распространения сейсмических волн вверх от глубинного источника и горизонтальной отражающей границы, функция  $v = v(z)$  не определяется по годографу отраженной волны однозначно, поскольку разным функциям  $v = v(z)$ , имеющим одну и ту же меру  $H(u)$ , где  $H(u) = \text{mes}\{z, z \leq z^*, v(z)^{-1} \leq u\}$ , соответствует одинаковая кривая  $t(x)$ . Однако функция  $H(u)$  определяется единственным образом. Если ограничиться классом монотонных скоростных функций, то решение задачи обращения годографа отраженной волны также будет единственным. Здесь мы для примера найдем решение задачи в классе строго возрастающих функций  $v = v(z)$  или соответственно в классе строго убывающих функций  $u = u(z)$ .

Введем функцию

$$\lambda(u) = -dz/du \geq 0. \quad (12)$$

Тогда, учитывая, что  $X = x_0 - z^* \text{tg} \beta$ , уравнения для  $x(p) - X$  и  $X - x(q)$  в (10) можно переписать в виде

$$x_0 - x(p) = p \int_{u^*}^{u_0} \frac{\lambda(u) du}{\sqrt{u^2 - p^2}} + z^* \text{tg} \beta, \quad (13)$$

$$x(q) - x_0 = q \int_{u^*}^{u_0} \frac{\lambda(u) du}{\sqrt{u^2 - q^2}} - z^* \text{tg} \beta,$$

где  $u^*$  – значение показателя преломления над границей в точке отражения. Поскольку  $z^* = \int_0^{z^*} dz = \int_{u^*}^{u_0} \lambda(u) du$ , то уравнения (13) можно записать в виде

$$x_0 - x(p) = \int_{u^*}^{u_0} \lambda(u) \left\{ \frac{p}{\sqrt{u^2 - p^2}} + \text{tg} \beta \right\} du, \quad (14)$$

$$x(q) - x_0 = \int_{u^*}^{u_0} \lambda(u) \left\{ \frac{q}{\sqrt{u^2 - q^2}} - \text{tg} \beta \right\} du,$$

где  $\beta$  – угол наклона границы в точке отражения ( $X, z^*$ ) определится из соотношений (11)  $\beta = 0,5[\arcsin(t'_2/u_0) - \arcsin(t'_1/u_0)]$ .

Уравнения (14) являются интегральными уравнениями Фредгольма первого рода. Так же как и в случае горизонтальной границы, в качестве решения уравнений (14) будем рассматривать решения в смысле

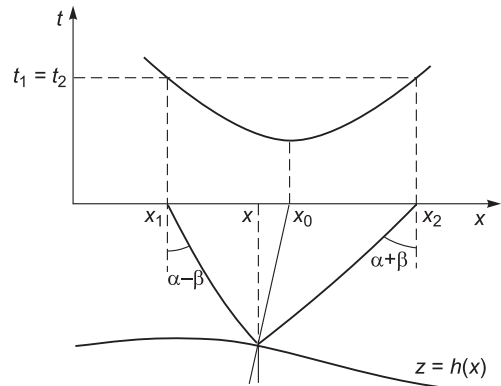


Рис. 4. Годограф волн, отраженных от общей точки криволинейной границы.

ле наименьших квадратов. Так, для второго уравнения в (14) решение будет обеспечивать минимум функционала [39]

$$J(\lambda, x_2 - x_0) = \int_0^r q \left\{ [x(q) - x_0] - \int_u^{u_0} \lambda(u) L(u, q) du \right\}^2 dq \quad (15)$$

и при этом отвечать соотношению (12). Здесь  $r$  – параметр луча, соответствующий крайней точке правой ветви годографа;

$$L(u, q) = \frac{q}{\sqrt{u^2 - q^2}} - \operatorname{tg} \beta.$$

Задача минимизации функционала (15) при условии (12) является задачей квадратичного программирования в бесконечномерном пространстве.

Как уже отмечалось, необходимым условием минимума функционала  $J(\lambda, x_2 - x_0)$  является равенство нулю его первой вариации

$$\delta J = \frac{d}{d\alpha} J[\lambda(u) + \alpha \delta \lambda, x_2 - x_0]_{\alpha=0}.$$

Проделив соответствующие выкладки, получим, что функция  $\lambda(u)$ , реализующая минимум функционала  $J(\lambda, x_2 - x_0)$ , является решением уравнения [39]

$$f(w) = \int_0^r q [x(q) - x_0] L(w, q) dq = \int_u^{u_0} \lambda(u) K(w, u) du, \quad (16)$$

где  $w \in [u, u_0]$ ;

$$\begin{aligned} K(w, u) &= \int_0^r q \left( \frac{q}{\sqrt{u^2 - q^2}} + \operatorname{tg} \beta \right) \left( \frac{q}{\sqrt{w^2 - q^2}} + \operatorname{tg} \beta \right) dq = \\ &= \int_0^r \left\{ \frac{q^3}{\sqrt{(u^2 - q^2)(w^2 - q^2)}} + \frac{q^2 \operatorname{tg} \beta}{\sqrt{u^2 - q^2}} + \frac{q^2 \operatorname{tg} \beta}{\sqrt{w^2 - q^2}} + q \operatorname{tg}^2 \beta \right\} dq = \\ &= 0,5 \left\{ \sqrt{(u^2 - r^2)(w^2 - r^2)} - uw + \right. \\ &= (u^2 + w^2) \ln \frac{u+w}{\sqrt{u^2 - r^2} + \sqrt{w^2 - r^2}} - \\ &- \operatorname{tg} \beta \left[ r \left( \sqrt{u^2 - r^2} + \sqrt{w^2 - r^2} \right) - \right. \\ &\left. \left. - u^2 \arcsin \frac{r}{u} - w^2 \arcsin \frac{r}{w} + r^2 \operatorname{tg} \beta \right] \right\}. \end{aligned}$$

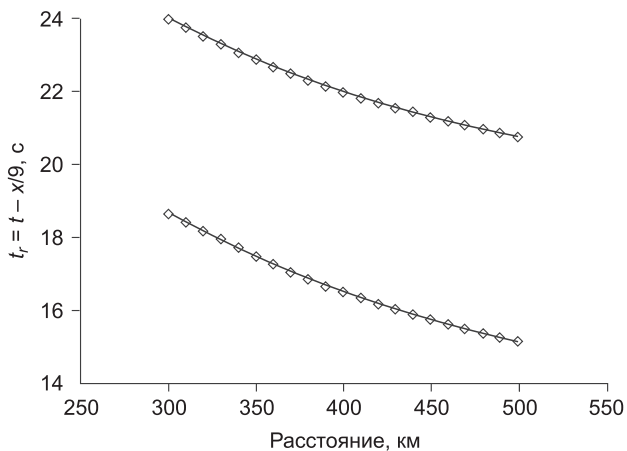


Рис. 5. Годографы прямой продольной и поперечной обменной волн.

Решая задачу (16), (12), получим функцию  $\lambda(u)$ . Функция  $z(u)$  определится из соотношения

$$z(u) = - \int_u^{u_0} \lambda(w) dw, \quad u \in [u^*, u_0].$$

#### ОБРАЩЕНИЕ ВЕРТИКАЛЬНОГО ГОДОГРАФА

Рассмотрим задачу обращения вертикального годографа сейсмической волны. Предположим, что скорость распространения сейсмической волны меняется только с глубиной  $z$ , источники упругих колебаний располагаются на полуоси  $(0, z)$ , а приемник помещен в точку с координатами  $(x_0, 0)$ .

Для волны, распространяющейся вверх от источника, расположенного на глубине  $z = z^*$ , имеют место уравнения (5). Если  $z^*$  пробегает интервал  $[0, z_M]$ , то имеем вертикальный годограф  $t = t(z)$ . Производная вертикального годографа связана со значением показателя преломления  $u^*$  на глубине источника и параметром луча соотношением

$$\frac{dt}{dz^*} = q(z^*) = \sqrt{u^{*2} - p^2}, \quad (17)$$

где  $u^{*2} = p^2 + q^2$ .

Выразим из (17)  $p$  и подставим в первое уравнение (5). В результате получим

$$\begin{aligned} x_0 &= \sqrt{u^{*2} - q^2} \int_0^{z^*} \frac{dz}{\sqrt{u^2(z) - u^{*2} + q^2}}, \\ t &= \int_0^{z^*} \frac{u^2(z) dz}{\sqrt{u^2(z) - u^{*2} + q^2}}. \end{aligned} \quad (18)$$

Уравнения (18) относительно неизвестных  $u^*$  и  $q$  легко решаются численными методами. Определяя  $u^*$  и  $q$  для каждого  $z \in [0, z_M]$ , найдем распределение  $u = u(z)$ .

#### ОБРАЩЕНИЕ РАЗНОСТИ ГОДОГРАФОВ ПРОДОЛЬНОЙ ВОЛНЫ И ОБМЕННОЙ ПОПЕРЕЧНОЙ ВОЛНЫ

Пусть источник упругих колебаний помещен в некоторую точку упругой среды. Рассмотрим ситуацию, при которой  $P$ -волна, падая снизу на границу слоя, возбуждает обменную  $SV$ -волну, которая вместе с  $P$ -волной регистрируется на дневной поверхности сейсмическими приемниками. При этом будем считать, что: 1) поверхность Земли в области обмена и приема колебаний плоская; 2) скорость распространения сейсмических волн является ограниченной на конечном интервале глубин  $[0, z]$  дважды кусочно-гладкой функцией глубины  $v = v(z)$ .

Запишем уравнения для определения разности эпицентральных расстояний и времен пробега обменной  $SV$ - и  $P$ -волн от границы обмена  $z = z^*$  до точки регистрации в параметрическом виде (рис. 5) [40]

$$\begin{aligned} \Delta x(p) &= \int_0^{z^*} \left\{ \frac{p}{\sqrt{u_p^2(z) - p^2}} - \frac{p}{\sqrt{u_s^2(z) - p^2}} \right\} dz, \\ \Delta t(p) &= \int_0^{z^*} \left\{ \frac{u_s^2(z)}{\sqrt{u_s^2(z) - p^2}} - \frac{u_p^2(z)}{\sqrt{u_p^2(z) - p^2}} \right\} dz, \end{aligned} \quad (19)$$

где  $u_p(z) = v_p^{-1}(z)$  и  $u_s(z) = v_s^{-1}(z)$  величины, обратные скоростям распространения соответственно  $P$ - и



$SV$ -волн;  $p$  – параметр луча  $P$ - и  $SV$ -волны;  $0 \leq p \leq u_p(z^* + 0)$ . Здесь мы считаем, что значения  $x_p(p)$ ,  $x_s(p)$  и  $t_p(p)$ ,  $t_s(p)$  соответствуют одной и той же точке границе обмена, но различными точкам регистрации прямой  $P$ - и обменной  $SV$ -волны.

В рассматриваемой задаче функции  $v_p(z)$  и  $v_s(z)$  не определяются по разности времен пробега обменной  $SV$ -волны и прямой  $P$ -волны единственным образом, так как разным скоростным функциям  $v_p(z)$  и  $v_s(z)$ , имеющим одни и те же меры  $H(u)$  и  $G(u)$ , где  $H(u) = \text{mes}\{z : z \leq z^*, v_p^{-1}(z) \leq u_p\}$ ,  $G(u) = \text{mes}\{z : z \leq z^*, v_s^{-1}(z) \leq u_s\}$ , соответствует одни и те же времена пробега поперечных  $t_s(p)$  и продольных сейсмических волн  $t_p(p)$ . По определению функции  $H(u)$  и  $G(u)$ : а) не убывают; б) равны нулю при  $-\infty < u \leq u^* = u(z^* - 0)$ ; в) равны  $h = z^*$  при  $u(0) = u_0 \leq u < \infty$ . Здесь  $u^*$  и  $u_0$  – соответственно минимальное и максимальное значения функции  $u(z) = v_Q^{-1}(z)$  в слое над границей обмена, где  $Q = \{P, S\}$ .

Запишем уравнения (19) в виде интегралов Стильтеса

$$\Delta x(p) = p \int_{u_p^0}^{u_p^0} \frac{dH(u)}{\sqrt{u^2 - p^2}} - p \int_{u_s^0}^{u_s^0} \frac{dG(u)}{\sqrt{u^2 - p^2}}, \quad (20)$$

$$\Delta t(p) = \int_{u_p^0}^{u_p^0} \frac{u^2 dH(u)}{\sqrt{u^2 - p^2}} - \int_{u_s^0}^{u_s^0} \frac{u^2 dG(u)}{\sqrt{u^2 - p^2}},$$

где  $0 \leq p \leq u_Q(z^* + 0) = u_Q^* \leq u_Q \leq u_Q^0$ ;  $Q = \{P, S\}$ ;  $dH(u) \geq 0$ ,  $dG(u) \geq 0$ .

Поставим задачу, из уравнений (20) определить функции  $H(u)$  и  $G(u)$ , следовательно, глубину границы обмена и минимальные и максимальные значения скоростей соответствующих сейсмических волн в слое над этой границей.

Умножим правую и левую части первого уравнения (20) на  $1/\sqrt{w^2 - p^2}$ , а второго на  $w^2 p/\sqrt{w^2 - p^2}$  и проинтегрируем полученные выражения по параметру  $p$  в пределах  $p_1$  и  $p_2$ . В результате будем иметь

$$f(w) = \int_{p_1}^{p_2} \frac{\Delta x(p) dp}{\sqrt{w^2 - p^2}} =$$

$$= \int_{p_1}^{p_2} \frac{p}{\sqrt{w^2 - p^2}} \left\{ \int_{u_p^0}^{u_p^0} \frac{dH(u)}{\sqrt{u^2 - p^2}} - \int_{u_s^0}^{u_s^0} \frac{dG(u)}{\sqrt{u^2 - p^2}} \right\} dp,$$

$$g(w) = w^2 \int_{p_1}^{p_2} \frac{\Delta t(p) p dp}{\sqrt{w^2 - p^2}} =$$

$$= w^2 \int_{p_1}^{p_2} \frac{p}{\sqrt{w^2 - p^2}} \left\{ \int_{u_p^0}^{u_p^0} \frac{u^2 dH(u)}{\sqrt{u^2 - p^2}} - \int_{u_s^0}^{u_s^0} \frac{u^2 dG(u)}{\sqrt{u^2 - p^2}} \right\} dp,$$

где  $0 \leq p_1 \leq p \leq p_2 \leq u_p^* \leq w$ ,  $u \leq u_s^*$ .

В правых частях уравнений поменяем местами интегралы, тогда получим

$$f(w) = \int_{u_p^0}^{u_p^0} dH(u) \int_{p_1}^{p_2} \frac{p dp}{\sqrt{(w^2 - p^2)(u^2 - p^2)}} -$$

$$- \int_{u_s^0}^{u_s^0} dG(u) \int_{p_1}^{p_2} \frac{p dp}{\sqrt{(w^2 - p^2)(u^2 - p^2)}},$$

$$g(w) = w^2 \int_{u_p^0}^{u_p^0} u^2 dH(u) \int_{p_1}^{p_2} \frac{p dp}{\sqrt{(w^2 - p^2)(u^2 - p^2)}} -$$

$$- w^2 \int_{u_s^0}^{u_s^0} u^2 dG(u) \int_{p_1}^{p_2} \frac{p dp}{\sqrt{(w^2 - p^2)(u^2 - p^2)}}.$$

Внутренние интегралы в последних уравнениях равны

$$K(w, u) = \int_{p_1}^{p_2} \frac{p dp}{\sqrt{(w^2 - p^2)(u^2 - p^2)}} =$$

$$= \ln \frac{\sqrt{w^2 - p_1^2} + \sqrt{u^2 - p_1^2}}{\sqrt{w^2 - p_2^2} + \sqrt{u^2 - p_2^2}}.$$

Функции  $f(w)$  и  $g(w)$  можно записать в виде, удобном для численного интегрирования

$$f(w) = f_P(w) - f_S(w), \quad g(w) = g_P(w) - g_S(w),$$

где

$$f_Q(w) = x(p_2) \arcsin \frac{p_2}{w} - x(p_1) \arcsin \frac{p_1}{w} - \int_{x_1}^{x_2} \arcsin \frac{t'(x)}{w} dx,$$

$$g_Q(w) = w^2 \left( t(p_1) \sqrt{w^2 - p_1^2} - t(p_2) \sqrt{w^2 - p_2^2} + \right.$$

$$\left. + \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{w^2 - t^2(x)} t'(x) dx \right) t'_2,$$

$$Q = \{P, S\}.$$

Окончательно уравнения, определяющие функции  $H(u)$  и  $G(u)$ , запишутся в виде

$$f(w) = \int_{u_p^0}^{u_p^0} K(w, u) dH(u) - \int_{u_s^0}^{u_s^0} K(w, u) dG(u), \quad (21)$$

$$g(w) = w^2 \left\{ \int_{u_p^0}^{u_p^0} u^2 K(w, u) dH(u) - \int_{u_s^0}^{u_s^0} u^2 K(w, u) dG(u) \right\}. \quad (22)$$

Таким образом, мы получили систему из двух интегральных уравнений Фредгольма относительно двух функций  $H(u)$  и  $G(u)$ , которые должны удовлетворять условиям

$$dH(u) \geq 0, \quad dG(u) \geq 0. \quad (23)$$

Нетрудно убедиться в том, что функции  $H(u)$  и  $G(u)$ , являющиеся решениями уравнений (21) и (22), минимизируют функционалы

$$I(H, \Delta x) =$$

$$= \int_{p_1}^{p_2} \frac{1}{p} \left\{ \Delta x(p) - p \int_{u_p^0}^{u_p^0} \frac{dH(u)}{\sqrt{u^2 - p^2}} + p \int_{u_s^0}^{u_s^0} \frac{dG(u)}{\sqrt{u^2 - p^2}} \right\}^2 dp, \quad (24)$$

$$J(H, \Delta t) =$$

$$= \int_{p_1}^{p_2} p \left\{ \Delta t(p) - \int_{u_p^0}^{u_p^0} \frac{u^2 dH(u)}{\sqrt{u^2 - p^2}} + \int_{u_s^0}^{u_s^0} \frac{u^2 dG(u)}{\sqrt{u^2 - p^2}} \right\}^2 dp. \quad (25)$$

Это означает, что в качестве решения уравнений (21) и (22) будем рассматривать решение в смысле наименьших квадратов.

Таким образом, задача определения функций  $u_p(z) = v_p^{-1}(u)$  и  $u_s(z) = v_s^{-1}(u)$  по разности годографов обменной поперечной и прямой продольной волн сводится к задаче квадратичного программирования в бесконечномерном пространстве, минимизации квадратичных функционалов (24) и (25) при линейных ограничениях (23).

В качестве решения задачи будем искать функцию, минимизирующую сумму функционалов

$$L(H, \Delta x, \Delta t) = \alpha_1 I(H, \Delta x) + \alpha_2 J(H, \Delta t),$$

где  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$  – весовые коэффициенты.

Лучевой параметр  $p$  пробегает значения в интервале  $[p_1, p_2]$ , где  $p_1 = t'(x_{\min}) \geq 0$ ,  $p_2 = t'(x_{\max}) \leq u^*$ , если годографы обращены выпуклостью вниз и  $p_1 = t'(x_{\max}) \geq 0$ ,  $p_2 = t'(x_{\min}) \leq u^*$ , если годографы обращены выпуклостью вверх. Указанный интервал изменения лучевого параметра должен быть достаточно широким. В этом случае определение скорости распространения сейсмических волн будет более устойчивым. Чтобы это условие было выполнено, необходимо зарегистрировать обменные волны от землетрясений в достаточно большом диапазоне или глубин, или эпицентральных расстояний.

Для вычисления интегралов в левых частях интегралов (23), (24) и ядра  $K$  необходимо знать значения производных годографов  $P$ - и  $SV$ -волн, которые равны соответствующим лучевым параметрам только в крайних их точках.

На рис. 6 приведен результат определения положения границы обмена, полученный путем обращения годографов  $P$ - и  $SV$ -волн, представленных на рис. 5.

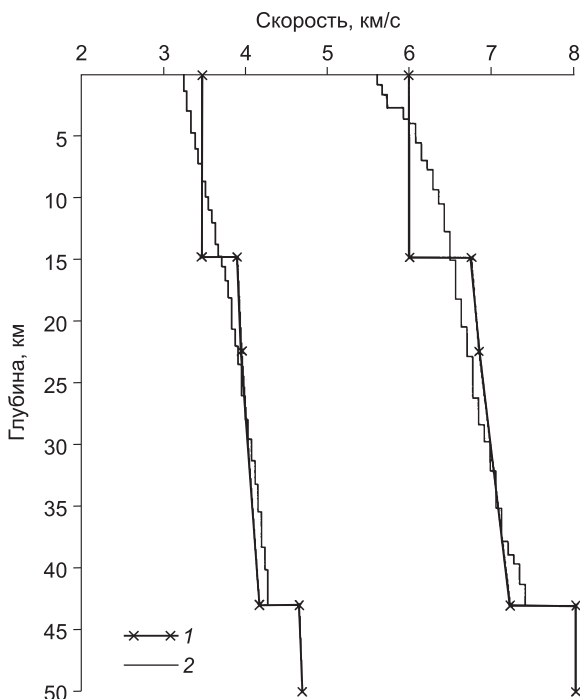


Рис. 6. Восстановленные скоростные кривые для двух-слойной модели земной коры по годографам, представленным на рис. 5.

Скоростные кривые: 1 – исходные, 2 – восстановленные.

Отметим, что на практике годографы продольной и обменной сейсмических волн можно получить двумя способами. Первый при помощи профильной установки сейсмических станций, которые регистрируют одно землетрясение. В этом случае, очевидно, годографы будут искажены вследствие того, что границы обмена не горизонтальны, что, в свою очередь, приведет к ошибкам в решении задачи. Второй способ заключается в том, чтобы регистрировать одной сейсмической станцией землетрясения, расположенные на различных эпицентральных расстояниях. Необходимо только привести все землетрясения к одной глубине. В этом случае годографы будут соответствовать положению границы и распределению скорости под соответствующей сейсмической станцией.

### СГЛАЖИВАНИЕ НАБЛЮДЕННЫХ ГОДОГРАФОВ СЕЙСМИЧЕСКИХ ВОЛН, РАСПРОСТРАНЯЮЩИХСЯ В ВЕРТИКАЛЬНО-НЕОДНОРОДНЫХ СРЕДАХ, ВЫПУКЛЫМИ КУБИЧЕСКИМИ СПЛАЙНАМИ

Практическое использование формул обращения сейсмических годографов, несмотря на достаточно хорошо развитую теорию, сталкивается с той трудностью, что они не применимы к реальным годографам, полученным из наблюдений, так как последние практически никогда не удовлетворяют условию разрешимости задачи, а сама обратная кинематическая задача сейсмологии является существенно некорректной.

Использование формул обращения сейсмического годографа предполагает, что лучевой параметр  $p$ , равный производной годографа, задан для каждого значения  $x \in [0, x_M]$ . Как правило, из наблюдений известны только величины  $x$  и  $t$ . Таким образом, возникает задача дифференцирования экспериментального годографа, заданного с погрешностями дискретным набором точек. Как известно, эта задача в общем случае также является некорректной.

Чтобы получить решение задачи с помощью формул обращения сейсмического годографа, необходимо предварительно сгладить экспериментальный годограф функцией  $T(x)$ , которая удовлетворяла бы определенным требованиям, предъявляемым к годографам, и имела бы минимальное отклонение от экспериментального годографа в заданной метрике  $\rho = (f, \tilde{f})$ . Дифференцируя найденную сглаживающую функцию, найдем значения параметров  $p$ .

Необходимо иметь в виду, что экспериментальный годограф задан дискретным набором точек, определенным сеткой наблюдений  $\Delta: a = x_0, \dots, x_n = b$ . Использование формул обращения предполагает, что функция  $t(x)$  задана на всем интервале  $[a, b]$ . Следовательно, необходимо восполнить экспериментальный годограф на интервалах  $[x_j, x_{j+1}]$ . Очевидно, что сглаживающая функция должна выполнить и эту задачу.

На участках монотонности и непрерывности функция  $t(x)$ , как уже упоминалось, должна удовлетворять требованиям, выполнение которых необходимо для того, чтобы  $t(x)$  была годографом рефрагированной или отраженной волны. Перечислим эти требования:

- 1) функция  $t(x)$  – неотрицательная функция,  $t(x) \geq 0$  ( $x \in [0, x_M]$ );
- 2) производная функции  $t(x)$  – неотрицательная функция,  $t'(x) \geq 0$ ;
- 3) если на сегменте  $[x_j, x_{j+1}]$  функция  $t(x)$  соответствует прямой ветви годографа, то вторая произ-

водная  $t''(x)$  – неположительная функция,  $t''(x) \leq 0$ . Если на сегменте  $[x_j, x_{j+1}]$  функция  $t(x)$  соответствует обратной ветви годографа, то вторая производная  $t''(x)$  – положительная функция,  $t''(x) > 0$ . В случае годографов отраженных волн и волн, распространяющихся вверх от источника, вторая производная функции  $t(x)$  должна быть неотрицательной функцией,  $t'' \geq 0$  [41].

Очевидно, что первое требование выполняется всегда, второе – почти всегда, за исключением тех возможных случаев, когда ошибки в определении точек годографа недопустимо велики. Третье же требование не выполняется практически никогда. Последнее обстоятельство связано с тем, что даже небольшие ошибки в определении времен и расстояний приводят к нарушению условий  $t''(x) \geq 0$  ( $t''(x) > 0$ ) для рефрагированных волн или  $t''(x) \geq 0$  для отраженных. Кроме этого неоднородность реальной упругой среды по латерали также приводит к нарушению третьего требования.

Условия  $t''(x) \leq 0$  ( $t''(x) \geq 0$ ) и  $t''(x) > 0$ , которым должны удовлетворять годографы рефрагированных (отраженных) волн, означают, что  $t(x)$  – выпуклые вверх или вниз функции и, следовательно, аппроксимирующие функции  $T(x)$  должны учитывать характер и степень гладкости  $t(x)$  на достаточно большой области определения  $t(x)$ .

Наиболее подходящими функциями, аппроксимирующими экспериментальный годограф, являются выпуклые кубические сплайны, так как они обладают четко выраженными локальными свойствами – существенное влияние на поведение функции  $T(x)$  оказывают лишь те  $t_i$ , которые заданы в точках, близких к  $x_j$ . Сплайны более низкого порядка не обеспечивают достаточной точности, а сплайны более высокого порядка – выпуклости [41].

Наша задача будет решена, если удастся построить такой сплайн, который доставлял бы минимум функционалу

$$S = \sum_{i=1}^{N-1} \left\{ \sum_{j=1}^{N-1} \alpha_{ij} T_j'' - \tilde{t}_i \right\}^2 \quad (26)$$

при условии выпуклости сплайна

$$T_j'' \leq 0 \quad (T_j'' > 0), \quad (27)$$

где  $\alpha_{ij}$  – коэффициенты системы линейных алгебраических уравнений, определяющей выпуклый кубический сплайн [41].

Задача (26), (27) также сводится к задаче квадратичного программирования.

#### ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В заключение отметим, что обращение годографов сейсмических волн, распространяющихся в вертикально-неоднородных средах, сводится к решению интегральных уравнений Фредгольма первого рода в классе монотонных скоростных функций. При этом решения находятся по любому конечному отрезку годографов. Однако, чем короче годограф, тем менее устойчиво определяется скоростная функция.

Примечательно, что все задачи, рассмотренные выше, редуцируются к задачам квадратичного программирования. Известно, что задача квадратичного программирования всегда имеет единственное решение, так как, например, выпуклый по  $T$  функционал  $S$  ограничен снизу и непрерывен на выпуклом множестве  $T = \{T'' \mid T'' \leq 0 \text{ (} T'' > 0)\}$ .

#### Литература

1. Алексеев А.С., Гельчинский В.Я. О лучевом методе вычисления полей волн в случае неоднородных сред с криволинейными границами раздела // Вопросы динамической теории распространения сейсмических волн. Л.: Наука, 1959. Вып. 3. С. 3–106.
2. Cerveny V., Molotcov I.A., Psencik I. Ray method in seismology. Praha: Univerzita Karlova, 1977. 214 p.
3. Кравцов Ю.А., Орлов Ю.И. Геометрическая оптика неоднородных сред. М.: Наука, 1980. 304 с.
4. Herglotz G. Uber das benndorfsche problem der fortpflanzungsgeschwindigkeit der erdbenstrahlen // Phys. Zeitschr. 1907. V. 8, N 5. P. 145–147.
5. Wiechert E. Uber erdbebenwellen. I. Theoretisches uber die ausbreitung der erdbebenwellen // Math. Physik. Kl. 1907. P. 415–529.
6. Bateman H. The solution of the integral equation which connects the velocity of propagation an earthquake wave in the interior of the Earth with the time which the disturbance takes to travel to different stations on the Earth's surface // Phil. Mag. 1910. V. 6, N 19. P. 576.
7. Slichter L.B. The theory of the interpretation of seismic travel-time curves in horizontal structures // J. Appl. Physics. 1932. V. 3, N 6. P. 273–295.
8. Чибисов С.В. Обработка криволинейного годографа упругих волн при плоскопараллельном распределении их скоростей в упругой среде // Журн. геофизики. 1934. Т. 4, вып. 2. С. 211–225.
9. Чибисов С.В. К теории сейсмического годографа // Бюл. Гос. геофиз. ин-та РСФСР. 1934. № 36. С. 28–35.
10. Гервер М.Л., Маркушевич В.М. Определение по годографу скорости распространения сейсмических волн // Методы и программы для анализа сейсмических наблюдений. М.: Наука, 1967. С. 3–51. (Выч. сейсм.; Вып. 3).
11. Гервер М.Л., Маркушевич В.М. Свойства годографа от поверхностного источника // Некоторые прямые и обратные задачи сейсмологии. М.: Наука, 1968. С. 15–63. (Выч. сейсм.; Вып. 4).
12. Маркушевич В.М. Характеристические свойства годографов от глубинных источников // Некоторые прямые и обратные задачи сейсмологии. М.: Наука, 1968. С. 64–77. (Выч. сейсм.; Вып. 4).
13. Маркушевич В.М. Устойчивость и некоторые оценки решения обратной задачи геометрической сейсмики // Теоретическая и вычислительная геофизика. М.: Наука, 1974. № 1. С. 118–168.
14. Маркушевич В.М., Резников Е.Л. Определение скоростного разреза по годографу при заданной нижней границе скорости // Вычислительные и статистические методы интерпретации сейсмических данных. М.: Наука, 1973. С. 160–198. (Выч. сейсм.; Вып. 6).
15. Бессонова Э.Н., Ситникова Г.А., Фишман В.М. Определение скоростного разреза по ограниченному набору точек годографа // Теорет. и вычисл. геофизика. 1974. № 2. С. 91–100.
16. Бессонова Э.Н., Ситникова Г.А., Фишман В.М. Обращение экспериментальных годографов объемных волн в рамках  $\tau$ -метода // Математические модели строения Земли и прогноза землетрясений. М.: Наука, 1982. С. 121–126. (Выч. сейсм.. Вып. 14).
17. Гейко В.С. Свойства и обращение годографа отраженной волны // Изв. АН СССР. Физика Земли. 1974. Т. 218, № 1. С. 88–91.
18. Гейко В.С. Теория обращения годографа отраженной волны // Геофиз. журн. 1980. Т. 2, № 3. С. 14–28.
19. Гейко В.С. Теория обращения годографа преломленной волны. I // Изв. АН СССР. Физика Земли. 1982. Т. 4, № 2. С. 3–17.

20. Тихонов А.Н., Арсенин В.Я. Методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1979. 285 с.
21. Федотов С.А., Матвеева Н.Н., Тараканов Р.З., Яновская Т.Б. О скоростях продольных волн в верхней мантии в области Японских и Курильских островов // Изв. АН СССР. Сер. геофиз. 1964. № 8. С. 1185–1198.
22. Матвеева Н.Н., Алексеев А.С. Машинный поиск вариантов скоростного разреза верхней мантии по совокупности годографов глубокофокусных землетрясений // Вопросы динамической теории распространения сейсмических волн. Л.: Наука, 1964. Вып. 7. С. 130–144.
23. Азбель И.Я., Кейлис-Борок В.И., Яновская Т.Б. Методика совместной интерпретации годографов и амплитудных кривых при изучении верхней мантии // Машинная интерпретация сейсмических волн. М.: Наука, 1966. С. 3–45. (Выч. сейсм.; Вып. 2).
24. Матвеева Н.Н. Машинный алгоритм и методика определения скоростного разреза по совокупности кинематико-динамических данных // Вопросы динамической теории распространения сейсмических волн. Л.: Наука, 1968. Вып. 9. С. 156–165.
25. Гольдин С.И., Киселева Л.С. О совместной обработке отраженных и рефрагированных волн по методу оптимизации // Вопросы теории и интерпретации сейсмических волн. Новосибирск, 1975. С. 91–108.
26. Баев А.В., Гласко В.Б. О решении обратной кинематической задачи сейсмологии с помощью регуляризирующего алгоритма // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1976. Т. 16, № 4. С. 922–931.
27. Гольдин С.В. Интерпретация данных сейсмического метода отраженных волн. М.: Недра, 1979. 344 с.
28. Цветкова Т.А. К вопросу обоснования аппроксимационного подхода в задаче обращения годографа отраженной волны // Геофиз. журн. 1983. Т. 5, № 2. С. 55–63.
29. Цветкова Т.А. О задаче численного обращения годографа отраженной волны // Там же. 1983. Т. 5, № 5. С. 57–65.
30. Гольдин С.В., Суворов В.Д. Аналитическое продолжение годографов отраженных волн // Докл. АН СССР. 1975. Т. 222, № 4. С. 825–828.
31. Молчан Г.М. Об интегральном уравнении геометрической сейсмологии // Распознавание и спектральный анализ в сейсмологии. М.: Наука, 1977. С. 196–213. (Выч. сейсм.; Вып. 10).
32. Молчан Г.М. Об использовании отраженных волн в рамках  $\tau$ -метода // Теория и анализ сейсмологических наблюдений. М.: Наука, 1979. С. 115–124. (Выч. сейсм.; Вып. 12).
33. Бляс Э.Ф. Определение параметров градиентно-слоистой среды по годографам отраженных волн // Геология и геофизика. 1982. № 9. С. 127–129.
34. Будянский Ю.А., Кудря А.В., Огурцов Н.И., Чекасин А.А. Об определении сейсмического разреза методом отраженных волн // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1975. Т. 15, № 1. С. 208–216.
35. Arnold E.P. Smoothing travel-time table // Bull. Seism. Soc. America. 1968. V. 58, N 4. P. 1345–1351.
36. Бурмин В.Ю. Обращение разрывного годографа рефрагированной волны // Физика Земли. 1996. № 10. С. 59–64.
37. Бурмин В.Ю. Обращение годографа сейсмической волны, распространяющейся от глубинного источника // Вулканология и сейсмология. 1988. № 6. С. 62–71.
38. Бурмин В.Ю. Численное обращение годографа отраженной волны // Геофиз. журн. 1992. Т. 14, № 1. С. 72–81.
39. Бурмин В.Ю. Обращение годографа общей точки отражения для вертикально-неоднородной среды с криволинейными границами // Докл. РАН. 1995. Т. 342, № 3. С. 386–389.
40. Бурмин В.Ю. Новые возможности в интерпретации годографов обменных волн // Вулканология и сейсмология. 1999. № 4–5. С. 145–151.
41. Бурмин В.Ю. Аппроксимация сейсмического годографа выпуклыми сплайнами // Изв. АН СССР. Физика Земли. 1980. № 2. С. 90–96.