

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
Геофизическая служба
Институт физики Земли
Институт динамики геосфер
Государственный геологический музей

**СЕЙСМОЛОГИЧЕСКИЕ НАБЛЮДЕНИЯ
НА ТЕРРИТОРИИ МОСКВЫ
И МОСКОВСКОЙ ОБЛАСТИ**

**МАТЕРИАЛЫ НАУЧНОЙ КОНФЕРЕНЦИИ, ПОСВЯЩЕННОЙ
100-ЛЕТИЮ СО ДНЯ РОЖДЕНИЯ
ЧЛЕНА-КОРРЕСПОНДЕНТА АН СССР Е.Ф. САВАРЕНСКОГО
И 75-ЛЕТИЮ ОТКРЫТИЯ СЕЙСМИЧЕСКОЙ СТАНЦИИ «МОСКВА»**

МОСКВА, 24–25 ФЕВРАЛЯ 2011 Г.

ОБРАТНЫЕ КИНЕМАТИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ СЕЙСМИКИ ДЛЯ ВЕРТИКАЛЬНО-НЕОДНОРОДНЫХ СРЕД

В.Ю. Бурмин, д.ф.-м.н.

Институт физики Земли им. О.Ю. Шмидта РАН, г. Москва

Аннотация. Статья посвящена обратным кинематическим задачам сейсмологии, над которыми автор активно работал в течение 20 лет, начиная с 1978 года. Рассмотрены практически все обратные кинематические задачи сейсмологии объемных волн, с которыми приходится сталкиваться при изучении внутреннего строения Земли по сейсмическим данным. Стимулом для решения этих задач в свое время послужила активная поддержка автора Е.Ф. Саваренским.

Формулы обращения разрывных годографов рефрагированных волн

Запишем параметрическое уравнение годографа рефрагированной волны, распространяющейся в вертикально-неоднородной среде:

$$x(p) = 2p \int_0^{\bar{z}} \frac{dz}{\sqrt{v^{-2}(z) - p^2}}, \quad t(p) = 2 \int_0^{\bar{z}} \frac{dz}{v^*(z) \sqrt{v^{-2}(z) - p^2}},$$

где $v(z)$ – скорость распространения сейсмической волны; p – параметр луча, численно равный производной годографа в соответствующей точке.

Пусть годограф имеет разрыв, связанный с наличием в среде слоя с пониженной скоростью (волновода). Рассмотрим задачу определения скоростной функции $v=v(z)$ на интервале $[0, z_M]$ по годографу рефрагированной волны. Будем искать решение задачи на множестве V положительных, дважды кусочно-гладких, ограниченных скоростных функций $v(z) \in V$, определенных на сегменте $[0, z_M]$, $z_M \leq H < \infty$. Будем полагать, что число разрывов годографа конечно. Пусть первая ветвь годографа начинается в точке $(0, 0)$ (что, вообще говоря, не обязательно). Тогда по формулам обращения годографа Герглотца–Вихерта–Чибисова по первой ветви годографа можно восстановить скоростную кривую до некоторой глубины z^* . Пересчитаем оставшиеся ветви годографа на уровень z^* . Будем иметь:

$$x(p, z^*) = x(p) - 2p \int_0^{z^*} \frac{dz}{\sqrt{u^2(z) - p^2}} = 2p \left\{ \int_{z^*}^{\bar{z}} + \int_{z^*}^{z(p)} \right\} \frac{dz}{\sqrt{u^2(z) - p^2}},$$

$$t(p, z^*) = t(p) - 2 \int_0^{z^*} \frac{u^*(z) dz}{\sqrt{u^2(z) - p^2}} = 2 \left\{ \int_{z^*}^{\bar{z}} + \int_{z^*}^{z(p)} \right\} \frac{u^2(z) dz}{\sqrt{u^2(z) - p^2}}.$$

Здесь $u(z) = v^{-1}(z)$. Будем называть величину $u(z)$.

Рассмотрим вторую ветвь годографа. Кривая $t(x)$ (после пересчета) будет иметь вид, показанный, например, на рис. 1.

Как известно, в волноводе существует бесконечное множество скоростных функций, которые удовлетворяют наблюдаемому годографу. Рассмотрим в волноводе функцию $H(u) = \text{mes}\{z : z \in [z^*, \bar{z}^*], v^{-1}(z) \leq u\}$. По определению функция $H(u)$: а) не убывает; б) равна нулю при $-\infty < u \leq \bar{u}^*$; в) равна $h = \bar{z}^* - z^*$ при $u^* \leq u < \infty$. Здесь \bar{u}^* – минимальное значение показателя преломления в волноводе; u^* – максимальное значение показателя преломления в волноводе.

Так как вне волновода функция $u = u(z)$ – строго убывающая, то, следовательно, существует обратная функция $z = z(u)$.

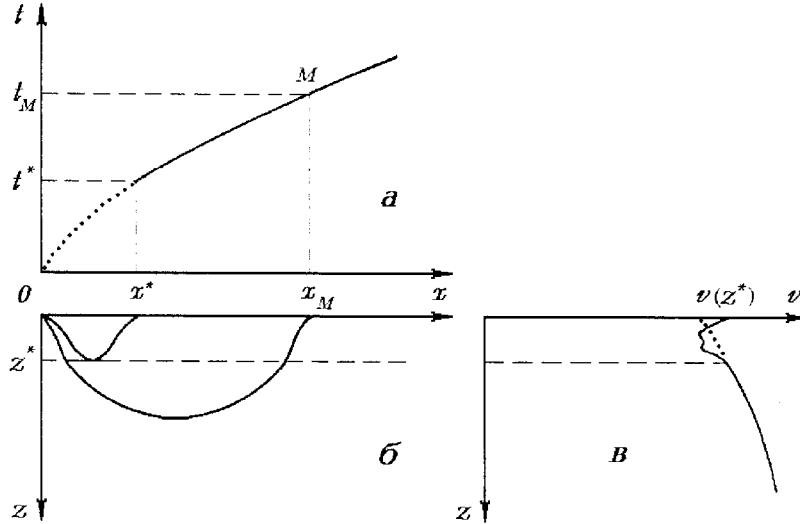


Рис. 1. Фрагмент годографа (а) рефрагированных волн и сейсмические лучи (б) для упругой среды с произвольным изменением скорости в верхней части разреза (в)

В этом случае уравнения годографа могут быть записаны в виде суммы интегралов Римана и Стилтъяеса:

$$x(p, z^*) = 2p \left\{ \int_p^{q_0} \frac{\lambda(u) du}{\sqrt{u^2 - p^2}} + \int_{\bar{u}^*}^{u^*} \frac{dH(u)}{\sqrt{u^2 - p^2}} \right\}, \quad t(p, z^*) = 2 \left\{ \int_p^{q_0} \frac{\lambda(u) u^2 du}{\sqrt{u^2 - p^2}} + \int_{\bar{u}^*}^{u^*} \frac{dH(u)}{\sqrt{u^2 - p^2}} \right\}, \quad (1)$$

где $\lambda(u) = -dz/du \geq 0$, $dH(u) \geq 0$.

Умножим правую и левую часть первого уравнения из (1) на $1/\sqrt{w^2 - p^2}$ и проинтегрируем в пределах от q до q_0 . Тогда будем иметь:

$$\int_q^{q_0} \frac{x(p, z^*) dp}{\sqrt{w^2 - p^2}} = \int_q^{q_0} \frac{2p}{\sqrt{w^2 - p^2}} \left\{ \int_p^{q_0} \frac{\lambda(u) du}{\sqrt{u^2 - p^2}} + \int_{\bar{u}^*}^{u^*} \frac{dH(u)}{\sqrt{u^2 - p^2}} \right\} dp, \quad \text{где } q \leq p \leq q_0 \leq \bar{u}^* \leq w \leq u^*.$$

Меняя местами внутренние и внешний интегралы, в соответствии с правилом Дирихле (область интегрирования показана на рис. 2), получим:

$$\int_q^{q_0} \frac{x(p, z^*) dp}{\sqrt{w^2 - p^2}} = \int_q^{q_0} \frac{2p}{\sqrt{w^2 - p^2}} \left\{ \int_p^{q_0} \frac{\lambda(u) du}{\sqrt{u^2 - p^2}} + \int_{\bar{u}^*}^{u^*} \frac{dH(u)}{\sqrt{u^2 - p^2}} \right\} dp = \int_q^{q_0} \lambda(u) \int_q^u \frac{2p dp}{\sqrt{(u^2 - p^2)(w^2 - p^2)}} du +$$

$$+ \int_{\bar{u}^*}^{u^*} dH(u) \int_q^{q_0} \frac{2p dp}{\sqrt{(u^2 - p^2)(w^2 - p^2)}} = \int_q^{q_0} \lambda(u) K_1(u, w) du + \int_{\bar{u}^*}^{u^*} K_2(u, w) dH(u), \quad (2)$$

где $K_1(u, w) = 2 \ln \frac{\sqrt{w^2 - q^2} + \sqrt{u^2 - q^2}}{\sqrt{w^2 - u^2}}$, $q \leq u \leq q_0 \leq \bar{u}^* \leq w \leq u^*$;

$$K_2(u, w) = 2 \ln \frac{\sqrt{w^2 - q^2} + \sqrt{u^2 - q^2}}{\sqrt{w^2 - q_0^2} + \sqrt{u^2 - q_0^2}}, \quad q \leq q_0 \leq u^* \leq u, w \leq u^*.$$

Умножим правую и левую часть второго уравнения из (1) на $p/\sqrt{w^2 - p^2}$ и также проинтегрируем в пределах от q до q_0 . В результате будем иметь:

$$\int_q^{q_0} \frac{t(p, z^*) p dp}{\sqrt{w^2 - p^2}} = \int_q^{q_0} \lambda(u) u^2 K_1(u, w) du + \int_{\bar{u}^*}^{u^*} u^2 K_2(u, w) dH(u). \quad (3)$$

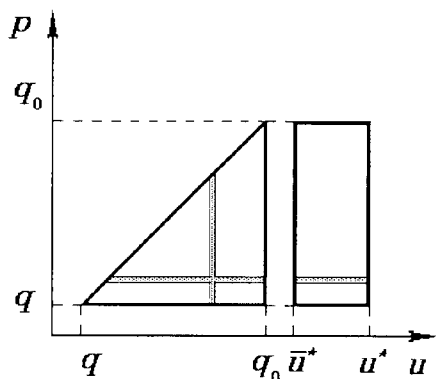


Рис. 2. Область интегрирования в задаче обращения разрывного годографа рефрагированных волн

Таким образом, мы получили систему из двух интегральных уравнений Фредгольма первого рода относительно двух функций $\lambda(u)$ и $H(u)$, которые должны удовлетворять условиям:

$$\lambda(u) \geq 0, \quad dH(u) \geq 0. \quad (4)$$

Для решения уравнений (2) и (3) сегмент $[q, q_0]$ разбивается $N+1$ точками на N частичных сегментов. На каждом частичном сегменте функция $\lambda(u)$ считается равной положительной константе $\lambda_j (j=1, 2, \dots, N)$. Сегмент $[\bar{u}^*, u^*]$ также разбивается $N+1$ точками на N частичных сегментов. На сегменте $[\bar{u}^*, u^*]$ рассматривается функция скачков $\Delta H_j (j=1, 2, \dots, N)$. Тогда уравнения (2) и (3) запишутся в виде системы из $2N$ уравнений, линейных относительно $2N-2$ неизвестных λ_j и ΔH_j и нелинейных относительно двух неизвестных $w_1 = u^*$ и $w_N = \bar{u}^*$. Численное решение этой задачи рассмотрено в [1].

Обращение годографа сейсмической волны, распространяющейся от глубинного источника вверх

Рассмотрим случай, когда источник упругих колебаний расположен на некоторой глубине $z^* > 0$. Предположим, что распределение скорости сейсмической волны выше источника и глубина источника не известны. Запишем уравнения годографа для сейсмических волн, идущих вверх от источника (на рис. 3 участок $[0, x^*]$):

$$x_1(p) = p \int_0^z \frac{dz}{\sqrt{v^{-2}(z) - p^2}}, \quad t_1(p) = \int_0^z \frac{dz}{v^*(z) \sqrt{v^{-2}(z) - p^2}}. \quad (5)$$

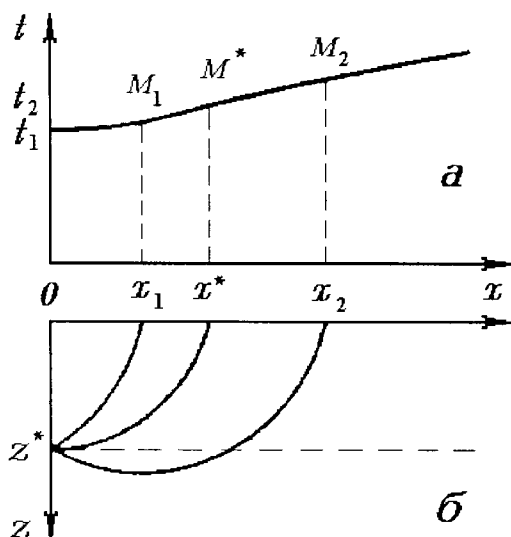


Рис. 3. Годограф (а) и лучи рефрагированных волн, распространяющихся от глубинного источника (б)

Запишем функцию $x_1(p)$ из (5) в виде интеграла Стильгеса:

$$x_1(p) = p \int_{u^*}^{u_0} \frac{dH(u)}{\sqrt{u^2 - p^2}}, \quad (6)$$

где $0 \leq p \leq u^* \leq u \leq u_0$; $dH(u) \geq 0$, т.е. $H(u)$ – монотонная функция.

Поставим задачу определить функцию $H(u)$ и, следовательно, глубину источника и минимальное и максимальное значения скорости в слое над источником. Напомним, что функция $H(u)$: а) не убывает; б) равна нулю при $-\infty < u \leq u^* = u(z^*)$; в) равна $h=z^*$ при $u(0) = u_0 \leq u < \infty$. Здесь u^* и u_0 – минимальное и максимальное значения $u(z)=v^{-1}(z)$ в слое над источником, соответственно.

В качестве решения уравнения (6) будем рассматривать такую функцию $H(u)$, которая минимизирует функционал:

$$J(H, x) = u \int_0^{u^*} \frac{1}{p} \left\{ x_1(p) - p \int_{u^*}^{u_0} \frac{dH(u)}{\sqrt{u^2 - p^2}} \right\}^2 dp \quad (7)$$

и удовлетворяет условию

$$dH(u) \geq 0. \quad (8)$$

Таким образом, задача определения функции $u(z)=v^{-1}(z)$ по годографу волны, распространяющейся вверх от глубинного источника, сводится к задаче квадратичного программирования в бесконечномерном пространстве, минимизации квадратичного функционала (7) при линейных ограничениях (8).

Необходимым условием минимума функционала $J(H, x)$ является равенство нулю его первой вариации:

$$\delta J = \frac{d}{da} J[H(u) + a \delta H, x]_{a=0}.$$

Проделив соответствующие вычисления, получим, что функция, реализующая минимум функционала $J(H, x)$, является решением уравнения:

$$f(w) = \int_0^{u^*} \frac{x_1(p) dp}{\sqrt{w^2 - p^2}} = 0.5 \int_{u^*}^{u_0} dH(u) \int_0^{u^*} \frac{p dp}{\sqrt{(w^2 - p^2)(u^2 - p^2)}}, \quad (9)$$

где $u^* \leq w \leq u_0$.

Внутренний интеграл в правой части (9) равен:

$$K(u, w) = 0.5 \int_0^{u^*} \frac{2p dp}{\sqrt{(w^2 - p^2)(u^2 - p^2)}} = \ln \frac{w+u}{\sqrt{w^2 - u^{*2}} + \sqrt{u^2 - u^{*2}}}.$$

Уравнение (9) можно записать в другом виде. Для этого в левой части уравнения (9) сделаем замену переменных $\xi = \arcsin(p/w)$ и проинтегрируем полученное выражение по частям. В результате получим:

$$f(w) = \int_0^{u^*} \frac{x_1(p) dp}{\sqrt{w^2 - p^2}} = \int_0^{\arcsin \frac{u^*}{w}} x_1(w, \xi) d\xi = x_1(u^*) \arcsin \frac{u^*}{w} - \int_0^{x(u^*)} \arcsin \frac{t(x)}{w} dx,$$

и окончательно приходим к интегральному уравнению Фредгольма первого рода

$$f(w) = x_1(u^*) \arcsin \frac{u^*}{w} - \int_0^{x(u^*)} \arcsin \frac{t(x)}{w} dx = \int_{u^*}^{u_0} \ln \frac{w+u}{\sqrt{w^2 - u^{*2}} + \sqrt{u^2 - u^{*2}}} dH(u)$$

с симметричным положительным ядром, решение которого ищется на множестве $\aleph(u)$ монотонных функций: $H(u) \in \aleph(u)$.

Функционал (7) и уравнение (9) соответствуют полному годографу сейсмической волны, распространяющейся вверх от источника. Пределы внешнего интегрирования 0 и u^* в функционале (7) равны значениям производных годографа в начальной $x=0$ и предельной $x=x^*$ точках годографа $t=t(x)$. Однако в силу различных причин, в основном в силу неполноты системы наблюдений, экспериментальные годографы прослеживаются на интервале $[x_{\min}, x_{\max}]$, который уже интервала $[0, x^*]$ ($0 \leq x_{\min}, x_{\max} \leq x^*$). Вследствие этого пределы внешнего интегрирования в (7) оказываются равными $p_1 = t'(x_{\min})$ и $p_2 = t'(x_{\max})$.

Пределы u^* и u_0 внутреннего интеграла в (7) в общем случае также не известны, а известны значения величин $u_{\max} \geq u_0$ и $u_{\min} = p_2 \leq u^*$. u_{\max} соответствует максимальному значению $u(z)$ на верхней границе слоя $0z^*$ и, как правило, всегда может быть задано априори. $u_{\min}=p_2$ равняется значению производной годографа в крайней правой его точке. В [2] дано численное решение задачи и в этом случае, где показано, что в классе монотонных функций скоростная кривая над источником и, следовательно, глубина источника восстанавливается по любому фрагменту годографа.

Обращение годографа отраженной волны

Уравнения годографа волны, отраженной от границы, расположенной на глубине $z=z^*$, с точностью до постоянного множителя 2 совпадают с уравнениями годографа волны, отраженной от границы $z=z^*$ [3]. Следовательно, определение изменения скорости в слое z_0z^* и положение границы можно проводить так же, как и в случае годографа волны, распространяющейся вверх от глубинного источника. Разница заключается в том, что в случае глубинного источника годограф соответствует первым вступлениям сейсмических волн и определяется достаточно надежно во всех точках наблюдений. В случае отраженных волн сейсмические колебания находятся в последующих вступлениях, а их амплитуда существенным образом зависит от коэффициента отражения на соответствующей границе.

Обращение годографа общей точки отражения (ОТО) для вертикально-неоднородной среды с криволинейной границей

Рассмотрим вертикально-неоднородную среду, т.е. среду, скорость распространения сейсмических волн в которой меняется только с глубиной $v=v(z)$, с криволинейной границей $z=h(x)$. Пусть на дневной поверхности регистрируются сейсмические волны, отраженные от одной точки границы $z=h(x)$. Тогда годограф ОТО будет иметь вид, показанный на рис. 4. На этом рисунке x_1, t_1 , и x_2, t_2 – точки годографа, соответственно, слева и справа от точки x_0 ; точка x_0 является точкой минимума годографа, а точка X – икс-овая координата точки отражения; β – угол наклона касательной к границе в точке отражения, отсчитываемый от горизонтали; $(\alpha-\beta)$ и $(\alpha+\beta)$ – углы выхода на дневную поверхность падающего и отраженного лучей. Уравнения годографа для этого случая запишутся в виде:

$$X - x(p) = p \int_0^{z^*} \frac{dz}{\sqrt{u^2(z) - p^2}}, \quad x(q) - X = q \int_0^{z^*} \frac{dz}{\sqrt{u^2(z) - q^2}}, \quad (10)$$

$$t(p) = t(q) = \int_0^{z^*} \left\{ \frac{u^2(z)}{\sqrt{u^2(z) - p^2}} + \frac{u^2(z)}{\sqrt{u^2(z) - q^2}} \right\} dz,$$

где p и q – параметры лучей справа и слева от точки отражения, равные

$$p = t_1' = u^0 \sin(\alpha - \beta), \quad q = t_2' = u^0 \sin(\alpha + \beta); \quad (11)$$

$u(z)=v^{-1}(z)$; $u^0=1/v^0$ – величина, обратная скорости на дневной поверхности; z^* – глубина точки отражения.

Так же, как и в случаях распространения сейсмических волн вверх от глубинного источника и горизонтальной отражающей границы, функция $v=v(z)$ не определяется по годографу отраженной волны однозначно, так как разным функциям $v=v(z)$, имеющим одну и ту же меру $H(u)$, где $H(u) = \text{mes}\{z, z \leq z^*, v(z)^{-1} \leq u\}$, соответствует одинаковая кривая $t(x)$. Однако функция $H(u)$ определяется единственным образом. Если ограничиться классом монотонных скоростных функций, то решение задачи обращения годографа отраженной волны также будет единственным. Здесь мы для примера найдем решение задачи в классе строго возрастающих функций $v=v(z)$ или, соответственно, в классе строго убывающих функций $u=u(z)$.

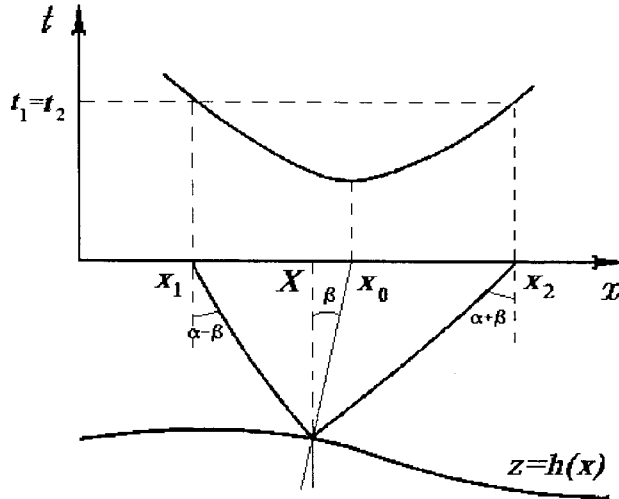


Рис. 4. Годограф волны, отраженных от общей точки криволинейной границы

Введем функцию:

$$\lambda(u) = -dz / du \geq 0. \quad (12)$$

Тогда, учитывая, что $X = x_0 - z^* \operatorname{tg} \beta$, уравнения для $x(p)-X$ и $X-x(q)$ в (10) можно переписать в виде:

$$x_0 - x(p) = p \int_{u^*}^{u_0} \frac{\lambda(u) du}{\sqrt{u^2 - p^2}} + z^* \operatorname{tg} \beta, \quad x(q) - x_0 = q \int_{u^*}^{u_0} \frac{\lambda(u) du}{\sqrt{u^2 - q^2}} - z^* \operatorname{tg} \beta, \quad (13)$$

где u^* – значение показателя преломления над границей в точке отражения. Так как $z^* = \int_0^{z^*} dz = \int_{u^*}^{u_0} \lambda(u) du$, то уравнение (13) можно записать в виде:

$$x_0 - x(p) = \int_{u^*}^{u_0} \lambda(u) \left\{ \frac{p}{\sqrt{u^2 - p^2}} + \operatorname{tg} \beta \right\} du, \quad x(q) - x_0 = \int_{u^*}^{u_0} \lambda(u) \left\{ \frac{q}{\sqrt{u^2 - q^2}} - \operatorname{tg} \beta \right\} du. \quad (14)$$

β – угол наклона границы в точке отражения (X, z^*) – определится из соотношений (11): $\beta = 0.5[\arcsin(t_2' / u_0) - \arcsin(t_1' / u_0)]$.

Уравнения (14) являются интегральными уравнениями Фредгольма первого рода. Так же, как и в случае горизонтальной границы, в качестве решения уравнений (14) будем рассматривать решения в смысле наименьших квадратов. Так, для второго уравнения в (14) решение будет обеспечивать минимум функционала

$$J(\lambda, x_2 - x_0) = \int_0^r q \left\{ [x(q) - x_0] - \int_{u^*}^{u_0} \lambda(u) L(u, q) du \right\}^2 dq \quad (15)$$

и при этом отвечать соотношению (12). Здесь r – параметр луча, соответствующий крайней точке правой ветви годографа:

$$L(u, p) = \frac{q}{\sqrt{u^2 - q^2}} - tg\beta.$$

Задача минимизации функционала (15) при условии (12) является задачей квадратичного программирования в бесконечномерном пространстве.

Как уже отмечалось, необходимым условием минимума функционала $J(\lambda, x_2 - x_0)$ является равенство нулю его первой вариации:

$$\delta J = \frac{d}{d\alpha} J[\lambda(u) + \alpha \delta \lambda, x_2 - x_0]_{\alpha=0}.$$

Проделав соответствующие выкладки, получим, что функция $\lambda(u)$, реализующая минимум функционала $J(\lambda, x_2 - x_0)$, является решением уравнения [4]:

$$f(w) = \int_0^r q[x(q) - x_0]L(w, q)dq = \int_u^{u_0} \lambda(u)K(w, u)du, \quad (16)$$

$$\begin{aligned} \text{где } w \in [u, u_0]; \quad K(w, u) &= \int_0^r q \left(\frac{q}{\sqrt{u^2 - q^2}} + tg\beta \right) \left(\frac{q}{\sqrt{w^2 - q^2}} + tg\beta \right) dq = \\ &= \int_0^r \left\{ \frac{q^3}{\sqrt{(u^2 - q^2)(w^2 - q^2)}} + \frac{q^2 tg\beta}{\sqrt{u^2 - q^2}} + \frac{q^2 tg\beta}{\sqrt{w^2 - q^2}} + q tg^2 \beta \right\} dq = \\ &= 0,5 \left\{ \sqrt{(u^2 - r^2)(w^2 - r^2)} - uw + (u^2 + w^2) \ln \frac{u + w}{\sqrt{u^2 - r^2} + \sqrt{w^2 - r^2}} - \right. \\ &\left. - tg\beta \left[r(\sqrt{u^2 - r^2} + \sqrt{w^2 - r^2}) - u^2 \arcsin \frac{r}{u} - w^2 \arcsin \frac{r}{w} + r^2 tg\beta \right] \right\}. \end{aligned}$$

Решая задачу (16), (12), получим функцию $\lambda(u)$. Функция $z(u)$ определится из соотношения:

$$z(u) = - \int_u^{u_0} \lambda(w)dw, \quad u \in [u^*, u_0].$$

Обращение вертикального годографа

Рассмотрим задачу обращения вертикального годографа сейсмической волны. Предположим, что скорость распространения сейсмической волны меняется только с глубиной z , источники упругих колебаний располагаются на полуоси $(0, z)$, а приемник помещен в точку с координатами $(x_0, 0)$.

Для волны, распространяющейся вверх от источника, расположенного на глубине $z = z^*$, имеют место уравнения (5). Если z^* пробегает интервал $[0, z_M]$, то имеем вертикальный годограф $t = t(z)$. Производная вертикального годографа связана со значением показателя преломления u^* на глубине источника и параметром луча соотношением:

$$\frac{dt}{dz^*} = q(z^*) = \sqrt{u^{*2} - p^2}, \quad (17)$$

где $u^{*2} = p^2 + q^2$.

Выразим из (17) p и подставим в первое уравнение (5). В результате получим:

$$x_0 = \sqrt{u^{*2} - q^2} \int_0^{z^*} \frac{dz}{\sqrt{u^2(z) - u^{*2} + q^2}}, \quad t = \int_0^{z^*} \frac{u^2(z) dz}{\sqrt{u^2(z) - u^{*2} + q^2}}. \quad (18)$$

Уравнения (18) относительно неизвестных u^* и q легко решаются численными методами. Определяя u^* и q для каждого $z \in [0, z_M]$, найдем распределение $u = u(z)$.

Определение скорости продольных и поперечных волн и мощности слоя по разности годографов продольной волны и обменной поперечной волны

Пусть источник упругих колебаний помещен в некоторую точку упругой среды. Рассмотрим ситуацию, при которой P -волна, падая снизу на границу слоя, возбуждает обменную SV -волну, которая вместе с P -волной регистрируется на дневной поверхности сейсмическими приемниками. При этом будем считать, что: 1) поверхность Земли в области обмена и приема колебаний плоская; 2) скорость распространения сейсмических волн является ограниченной на конечном интервале глубин $[0, z]$ дважды кусочно-гладкой функцией глубины $v=v(z)$.

Запишем уравнения для определения разности эпицентральных расстояний и времен пробега обменной SV - и P -волн от границы обмена $z=z^*$ до точки регистрации в параметрическом виде:

$$\Delta x(p) = \int_0^{z^*} \left\{ \frac{p}{\sqrt{u_p^2(z) - p^2}} - \frac{p}{\sqrt{u_s^2(z) - p^2}} \right\} dz, \quad \Delta t(p) = \int_0^{z^*} \left\{ \frac{u_s^2(z)}{\sqrt{u_s^2(z) - p^2}} - \frac{u_p^2(z)}{\sqrt{u_p^2(z) - p^2}} \right\} dz, \quad (19)$$

где $u_p(z)=v_p^{-1}(z)$ и $u_s(z)=v_s^{-1}(z)$ – величины, обратные скоростям распространения, соответственно, P - и SV -волн; p – параметр луча P - и SV -волны; $0 \leq p \leq u_p(z^*+0)$. Здесь мы считаем, что значения $x_p(p)$, $x_s(p)$ и $t_p(p)$, $t_s(p)$ соответствуют одной и той же точке границы обмена, но различным точкам регистрации прямой P - и обменной SV -волны.

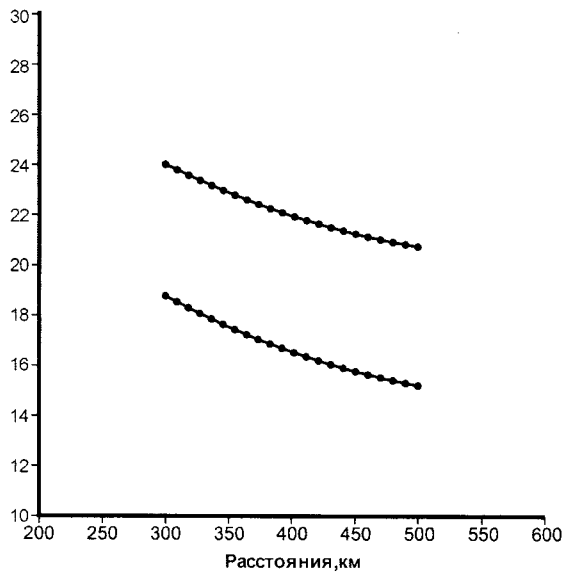


Рис. 5. Годографы прямой продольной и поперечной обменной волн

В рассматриваемой задаче функции $v_p(z)$ и $v_s(z)$ не определяются по разности времен пробега обменной SV -волны и прямой P -волны единственным образом, т.к. разным скоростным функциям $v_p(z)$ и $v_s(z)$, имеющим одни и те же меры $H(u)$ и $G(u)$, где $H(u)=\text{mes}\{z: z \leq z^*, v_p^{-1}(z) \leq u_p\}$, $G(u)=\text{mes}\{z: z \leq z^*, v_s^{-1}(z) \leq u_s\}$, соответствуют одни и те же времена пробега поперечных $t_s(p)$ и продольных сейсмических волн $t_p(p)$.

По определению функции $H(u)$ и $G(u)$: а) не убывают; б) равны нулю при $-\infty < u \leq u^* = u(z^*-0)$; в) равны $h=z^*$ при $u(0)=u_0 \leq u < \infty$. Здесь u^* и u_0 – соответственно, минимальное и максимальное значения функции $u(z)=v_Q^{-1}(z)$ в слое над границей обмена, где $Q=\{P, S\}$.

Запишем уравнения (19) в виде интегралов Стильтьеса:

$$\Delta x(p) = p \int_{u_p^0}^{u_p^*} \frac{dH(u)}{\sqrt{u^2 - p^2}} - p \int_{u_s^0}^{u_s^*} \frac{dG(u)}{\sqrt{u^2 - p^2}}, \quad \Delta t(p) = \int_{u_p^0}^{u_p^*} \frac{u^2 dH(u)}{\sqrt{u^2 - p^2}} - \int_{u_s^0}^{u_s^*} \frac{u^2 dG(u)}{\sqrt{u^2 - p^2}}, \quad (20)$$

Поставим задачу из уравнений (20) определить функции $H(u)$ и $G(u)$, следовательно, глубину границы обмена и минимальные и максимальные значения скоростей соответствующих сейсмических волн в слое над этой границей.

Умножим правую и левую части первого уравнения (20) на $1/\sqrt{w^2 - p^2}$, а второго – на $w^2 p/\sqrt{w^2 - p^2}$, и проинтегрируем полученные выражения по параметру p в пределах p_1 и p_2 . В результате будем иметь:

$$f(w) = \int_{p_1}^{p_2} \frac{\Delta x(p) dp}{\sqrt{w^2 - p^2}} = \int_{p_1}^{p_2} \frac{p}{\sqrt{w^2 - p^2}} \left\{ \int_{u_p^0}^{u_p^0} \frac{dH(u)}{\sqrt{u^2 - p^2}} - \int_{u_s^0}^{u_s^0} \frac{dG(u)}{\sqrt{u^2 - p^2}} \right\} dp,$$

$$g(w) = w^2 \int_{p_1}^{p_2} \frac{\Delta l(p) p dp}{\sqrt{w^2 - p^2}} = w^2 \int_{p_1}^{p_2} \frac{p}{\sqrt{w^2 - p^2}} \left\{ \int_{u_p^0}^{u_p^0} \frac{u^2 dH(u)}{\sqrt{u^2 - p^2}} - \int_{u_s^0}^{u_s^0} \frac{u^2 dG(u)}{\sqrt{u^2 - p^2}} \right\} dp,$$

где $0 \leq p_1 \leq p \leq p_2 \leq u_p^* \leq w$, $u \leq u_s^0$.

В правых частях уравнений поменяем местами интегралы, тогда получим:

$$f(w) = \int_{u_p^0}^{u_p^0} dH(u) \int_{p_1}^{p_2} \frac{p dp}{\sqrt{(w^2 - p^2)(u^2 - p^2)}} - \int_{u_s^0}^{u_s^0} dG(u) \int_{p_1}^{p_2} \frac{p dp}{\sqrt{(w^2 - p^2)(u^2 - p^2)}},$$

$$g(w) = w^2 \int_{u_p^0}^{u_p^0} u^2 dH(u) \int_{p_1}^{p_2} \frac{p dp}{\sqrt{(w^2 - p^2)(u^2 - p^2)}} - w^2 \int_{u_s^0}^{u_s^0} u^2 dG(u) \int_{p_1}^{p_2} \frac{p dp}{\sqrt{(w^2 - p^2)(u^2 - p^2)}}.$$

Внутренние интегралы в последних уравнениях равны:

$$K(w, u) = \int_{p_1}^{p_2} \frac{p dp}{\sqrt{(w^2 - p^2)(u^2 - p^2)}} = \ln \frac{\sqrt{w^2 - p_1^2} + \sqrt{u^2 - p_1^2}}{\sqrt{w^2 - p_2^2} + \sqrt{u^2 - p_2^2}}.$$

Функции $f(w)$ и $g(w)$ можно записать в виде, удобном для численного интегрирования:

$$f(w) = f_P(w) - f_S(w), \quad g(w) = g_P(w) - g_S(w),$$

где $f_Q(w) = x(p_2) \arcsin \frac{p_2}{w} - x(p_1) \arcsin \frac{p_1}{w} - \int_{x_1}^{x_2} \arcsin \frac{t'(x)}{w} dx$,

$$g_Q(w) = w^2 \left\{ t(p_1) \sqrt{w^2 - p_1^2} - t(p_2) \sqrt{w^2 - p_2^2} + \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{w^2 - t'^2(x)} t'(x) dx \right\}, \quad Q = \{P, S\}.$$

Окончательно уравнения, определяющие функции $H(u)$ и $G(u)$, запишутся в виде:

$$f(w) = \int_{u_p^0}^{u_p^0} K(w, u) dH(u) - \int_{u_s^0}^{u_s^0} K(w, u) dG(u), \quad (21)$$

$$g(w) = w^2 \left\{ \int_{u_p^0}^{u_p^0} u^2 K(w, u) dH(u) - \int_{u_s^0}^{u_s^0} u^2 K(w, u) dH(u) \right\}. \quad (22)$$

Таким образом, мы получили систему из двух интегральных уравнений Фредгольма относительно двух функций $H(u)$ и $G(u)$, которые должны удовлетворять условиям:

$$dH(u) \geq 0, \quad dG(u) \geq 0. \quad (23)$$

Нетрудно убедиться в том, что функции $H(u)$ и $G(u)$, являющиеся решениями уравнений (21) и (22), минимизируют функционалы:

$$I(H, \Delta x) = \int_{p_1}^{p_2} \frac{1}{p} \left\{ \Delta x(p) - p \int_{u_p^0}^{u_p^1} \frac{dH(u)}{\sqrt{u^2 - p^2}} + p \int_{u_s^0}^{u_s^1} \frac{dG(u)}{\sqrt{u^2 - p^2}} \right\}^2 dp, \quad (24)$$

$$J(H, \Delta t) = \int_{p_1}^{p_2} p \left\{ \Delta t(p) - \int_{u_p^0}^{u_p^1} \frac{u^2 dH(u)}{\sqrt{u^2 - p^2}} + \int_{u_s^0}^{u_s^1} \frac{u^2 dG(u)}{\sqrt{u^2 - p^2}} \right\}^2 dp. \quad (25)$$

Это означает, что в качестве решения уравнений (21) и (22) рассматривается решение в смысле наименьших квадратов.

Таким образом, задача определения функций $u_p(z) = v_p^{-1}(u)$ и $u_s(z) = v_s^{-1}(u)$ по разности годографов обменной поперечной и прямой продольной волн сводится к задаче квадратичного программирования в бесконечномерном пространстве, минимизации квадратичных функционалов (24) и (25) при линейных ограничениях (23).

Окончательно в качестве решения задачи ищем такую монотонную скоростную функцию, минимизирующую сумму функционалов $L(H, \Delta x, \Delta t) = \alpha_1 I(H, \Delta x) + \alpha_2 J(H, \Delta t)$, где α_1 и α_2 – весовые коэффициенты.

Лучевой параметр p пробегает значения в интервале $[p_1, p_2]$, где $p_1 = t'(x_{\min}) \geq 0$, $p_2 = t'(x_{\max}) \leq u^*$, если годографы обращены выпуклостью вниз, и $p_1 = t'(x_{\max}) \geq 0$, $p_2 = t'(x_{\min}) \leq u^*$, если годографы обращены выпуклостью вверх. Указанный интервал изменения лучевого параметра должен быть достаточно широким. В этом случае определение скорости распространения сейсмических волн будет более устойчивым. Чтобы это условие было выполнено, необходимо зарегистрировать обменные волны от землетрясений в достаточно большом диапазоне или глубин, или эпицентральных расстояний.

Для вычисления интегралов в левых частях интегралов (23), (24) и ядра K необходимо знать значения производных годографов P - и SV -волн, которые равны соответствующим лучевым параметрам только в крайних их точках.

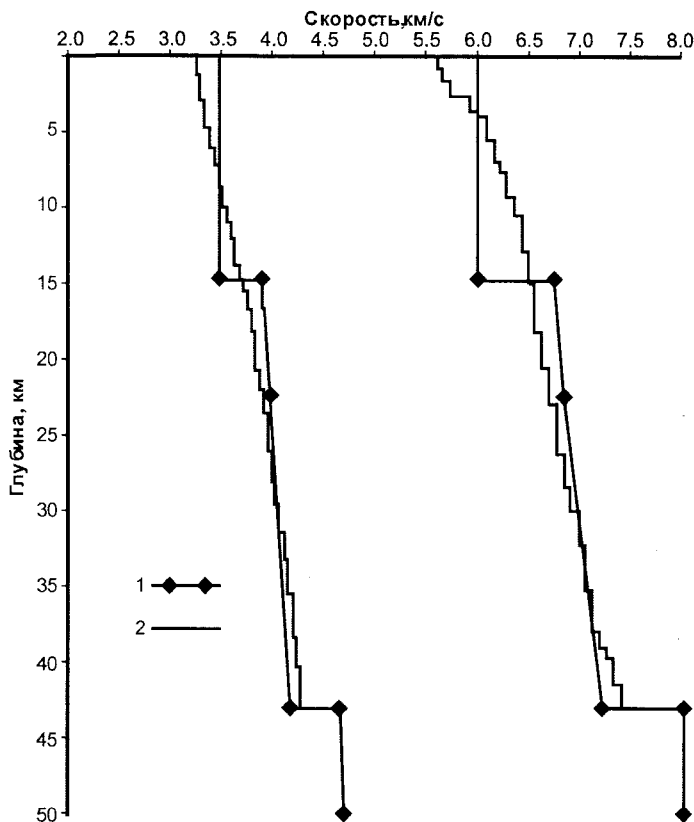


Рис. 6. Восстановленные скоростные кривые для двухслойной модели земной коры по годографам, представленным на рис. 5:
1 – исходные скоростные кривые;
2 – восстановленные скоростные кривые

Сглаживание наблюдаемых годографов сейсмических волн, распространяющихся в вертикально-неоднородных средах, выпуклыми кубическими сплайнами

Практическое использование формул обращения сейсмических годографов, несмотря на достаточно хорошо развитую теорию, сталкивается с той трудностью, что они не применимы к реальным годографам, полученным из наблюдений, т.к. последние практически никогда не удовлетворяют условию разрешимости задачи, а сама обратная кинематическая задача сейсмологии является существенно некорректной задачей.

Использование формул обращения сейсмического годографа предполагает, что лучевой параметр p , равный производной годографа, задан для каждого значения $x \in [0, x_M]$. Поскольку предполагается, что из наблюдений известны только величины x и t , то возникает задача дифференцирования экспериментального годографа, заданного с погрешностями дискретным набором точек. Как известно, эта задача в общем случае также является некорректной.

Чтобы получить решение задачи с помощью формул обращения сейсмического годографа, необходимо предварительно сгладить экспериментальный годограф некоторой функцией $T(x)$, которая удовлетворяла бы определенным требованиям, предъявляемым к годографам, и имела бы минимальное отклонение от экспериментального годографа в заданной метрике $\rho = (f, \tilde{f})$. Дифференцируя найденную сглаживающую функцию, найдем значения параметров p .

Необходимо иметь в виду, что экспериментальный годограф задан дискретным набором точек, определенным сеткой наблюдений $\Delta: a = x_0, \dots, x_n = b$. В то же время для того, чтобы воспользоваться формулами обращения, необходимо, чтобы функция $t(x)$ была задана на всем интервале $[a, b]$. Следовательно, необходимо восполнить экспериментальный годограф на интервалах $[x_j, x_{j+1}]$. Очевидно, что сглаживающая функция должна выполнить и эту задачу.

На участках монотонности и непрерывности функция $t(x)$, как уже упоминалось, должна удовлетворять требованиям, выполнение которых является необходимым условием для того, чтобы $t(x)$ являлась годографом рефрагированной или отраженной волны. Перечислим эти требования:

- 1) функция $t(x)$ – неотрицательная функция, $t(x) \geq 0$ ($x \in [0, x_M]$);
- 2) производная функции $t(x)$ – неотрицательная функция, $t'(x) \geq 0$;
- 3) если на сегменте $[x_j, x_{j+1}]$ функция $t(x)$ соответствует прямой ветви годографа, то вторая производная $t''(x)$ – неположительная функция, $t''(x) \leq 0$. Если на сегменте $[x_j, x_{j+1}]$ функция $t(x)$ соответствует обратной ветви годографа, то вторая производная $t''(x)$ – положительная функция, $t''(x) > 0$. В случае годографов отраженных волн и волн, распространяющихся вверх от источника, вторая производная функции $t(x)$ должна быть неотрицательной функцией, $t'' \geq 0$ [6].

Очевидно, что первое требование выполняется всегда. Второе требование выполняется почти всегда, за исключением тех возможных случаев, когда ошибки в определении точек годографа недопустимо велики. Третье же требование не выполняется практически никогда. Последнее обстоятельство связано с тем, что даже небольшие ошибки в определении времен и расстояний приводят к нарушению условий $t''(x) \leq 0$ ($t''(x) > 0$) для рефрагированных волн или $t''(x) \geq 0$ – для отраженных. Кроме этого, неоднородность реальной упругой среды по латерали также приводит к нарушению третьего требования.

Условия $t''(x) \leq 0$ ($t''(x) \geq 0$) и $t''(x) > 0$, которым должны удовлетворять годографы рефрагированных (отраженных) волн, означают, что $t(x)$ – выпуклые вверх или вниз функции и, следовательно, аппроксимирующие функции $T(x)$ должны учитывать характер и степень гладкости $t(x)$ на достаточно большой области определения $t(x)$.

Наиболее подходящими функциями, аппроксимирующими экспериментальный годограф, являются выпуклые кубические сплайны, т.к. они обладают четко выраженными локальными свойствами – существенное влияние на поведение функции $T(x)$ оказывают лишь те t_i , которые заданы в точках, близких к x_i . Сплайны более низкого порядка не обеспечивают достаточной точности, а сплайны более высокого порядка не обеспечивают выпуклости [6].

Наша задача будет решена, если удастся построить такой сплайн, который доставлял бы минимум функционалу:

$$S = \sum_{i=1}^{N-1} \left\{ \sum_{j=1}^{N-1} \alpha_{ij} T_j'' - \tilde{t}_i \right\}^2 \quad (26)$$

при условии выпуклости сплайна

$$T_j'' \leq 0 \quad (T_j'' > 0), \quad (27)$$

где α_{ij} – коэффициенты системы линейных алгебраических уравнений, определяющей выпуклый кубический сплайн [6].

Задача (26) также сводится к задаче квадратичного программирования.

Примечательно, что все рассмотренные выше задачи редуцируются к задачам квадратичного программирования. Хорошо известно, что задача квадратичного программирования всегда имеет единственное решение, т.к., например, выпуклый по T функционал S ограничен снизу и непрерывен на выпуклом множестве $T = \{ T'' \mid T'' \leq 0 \}$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Бурмин В.Ю.** Обращение разрывного годографа рефрагированной волны // Физика Земли. – 1996. – № 10. – С. 59–64.
2. **Бурмин В.Ю.** Обращение годографа сейсмической волны, распространяющейся от глубинного источника // Вулканология и сейсмология. – 1988. – № 6. – С. 62–71.
3. **Бурмин В.Ю.** Численное обращение годографа отраженной волны // Геофизический журнал. – 1992. – Т. 14, № 1. – С. 72–81.
4. **Бурмин В.Ю.** Обращение годографа общей точки отражения для вертикально-неоднородной среды с криволинейными границами // ДАН. – 1995. – Т. 342, № 3. – С. 386–389.
5. **Бурмин В.Ю.** Новые возможности в интерпретации годографов обменных волн // Вулканология и сейсмология. – 1999. – № 4–5. – С. 145–151.
6. **Бурмин В.Ю.** Аппроксимация сейсмического годографа выпуклыми сплайнами // Известия АН СССР. Физика Земли. – 1980. – № 2. – С. 90–96.