

ОПРЕДЕЛЕНИЕ СКОРОСТИ ПРОДОЛЬНЫХ ВОЛН И МОЩНОСТИ СЛОЯ ПО РАЗНОСТИ ГОДОГРАФОВ ОБМЕННЫХ ПОПЕРЕЧНЫХ И ПРОДОЛЬНЫХ ВОЛН

© 2000 г. В. Ю. Бурмин

Объединенный институт физики Земли им. О.Ю. Шмидта РАН, г. Москва

Поступила в редакцию 23.02.98 г.

Для решения задачи обращения разности годографов обменной SV-волны и P-волны, распространяющихся в вертикально-неоднородной упругой среде, в скоростной разрез, т.е. для определения скорости распространения продольных сейсмических волн и положения границы обмена, получена пара интегральных уравнений Фредгольма первого рода, связывающих скорость распространения продольной сейсмической волны и разности времен пробега обменных поперечных и прямых продольных волн. Приведены примеры определения скоростной функции в слое и положения границы обмена по данным численного моделирования.

ВВЕДЕНИЕ

Для определения изменения скорости распространения сейсмических волн в упругой среде наиболее распространенным является метод рефрагированных, или преломленных волн. Недостатком метода преломленных волн является то обстоятельство, что годографам первых вступлений соответствует, как правило, незначительное их проникновение в глубь слоев, особенно при малых градиентах скорости в слоях. Вследствие этого по годографам первых вступлений определяется распределение скорости сейсмических волн только в самых верхних частях соответствующих слоев. Более полную информацию о распределении скоростей сейсмических волн можно получить, если привлечь к интерпретации годографы отраженных волн. В этом случае можно определить распределение скорости вплоть до отражающей границы. Однако работы по изучению скоростного строения Земли методами преломленных и отраженных волн достаточно дорогостоящие, в частности, из-за производства больших взрывов, и поэтому масштабы их проведения не велики.

Как альтернатива этим методам в сейсмологической практике для определения строения Земли достаточно широко применяется метод обменных волн от землетрясений (МОВЗ) [Андреев, 1957; Булин, 1960; Померанцева, Мозженко, 1977; Гальперин и др., 1995]. Тем не менее до настоящего времени не существует строгой теории обращения разности времен пробега продольной и поперечной обменной волны в скоростной разрез. В работе [Гальперин и др., 1995] прямо говорится, что «Скорости распространения упругих волн по данным МОВЗ определить не возможно...». Традиционно по данным МОВЗ по заданным средним ско-

ростям распространения продольных и поперечных сейсмических волн, полученным по данным других наблюдений, определяется только глубина границы обмена. Обычно для этого используется формула М. Хазегава [Hasegawa, 1930; Померанцева, Мозженко, 1977; Гальперин и др., 1995] или другие достаточно простые формулы [Андреев, 1957; Булин, 1960]. Следует отметить, что Р.З. Ахмеров [Ахмеров, 1974] предложил определять среднюю скорость продольных волн в слое и положение границы обмена на основе формулы М. Хазегава по совокупности наблюдений в одной точке. При этом для определения глубины границы обмена используются продольные и обменные поперечные волны, соответствующие одной точке наблюдений, но различным точкам на границе обмена, т.е. различным лучам, вдоль которых распространяются продольные сейсмические волны до границы обмена. В этом случае расстояние между точками обмена остается неизвестным, что приводит к неопределенности в определении скорости распространения сейсмических волн выше границы обмена, а сама формула имеет приближенный характер.

В настоящей статье для определения скорости в слое и мощности слоя предлагается использовать точки годографов продольной волны и обменной поперечной, соответствующие одной точке обмена и имеющие один и тот же лучевой параметр, т.е. соответствующие одному и тому же лучу до точки обмена. Для этого случая получены интегральные уравнения Фредгольма первого рода, связывающие скорости распространения продольных сейсмических волн и разности годографов обменных поперечных и прямых продольных волн, распространяющихся в вертикально-неоднородной упругой среде в предположении, что

отношение скоростей продольных и поперечных волн в слое выше границы обмена постоянно и известно.

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ДЛЯ ОПРЕДЕЛЕНИЯ СКОРОСТИ ПРОДОЛЬНЫХ СЕЙСМИЧЕСКИХ ВОЛН, РАСПРОСТРАНЯЮЩИХСЯ В ВЕРТИКАЛЬНО-НЕОДНОРОДНОЙ СРЕДЕ

Пусть источник упругих колебаний помещен в некоторую точку упругой среды. Рассмотрим ситуацию, при которой P -волна, падая снизу на границу слоя, возбуждает обменную SV -волну, которая вместе с P -волной регистрируется на дневной поверхности сейсмическими приемниками. При этом будем считать, что: 1) поверхность Земли в области обмена и приема колебаний плоская; 2) скорость распространения сейсмических волн является ограниченной на конечном интервале глубин $[0, z]$, дважды кусочногладкой функцией глубины $v = v(z)$; 3) отношение скоростей распространения P - и SV -волн известно и равняется $k = v_p/v_s$.

Запишем уравнения для определения разности эпицентральных расстояний и времен пробега обменной SV - и P -волн от границы обмена $z = z^*$ до точки регистрации в параметрическом виде

$$\begin{aligned} x_p(p) - x_s(p) &= \\ = \Delta x(p) &= \int_0^{z^*} \left\{ \frac{p}{\sqrt{u_p^2(z) - p^2}} - \frac{p}{\sqrt{u_s^2(z) - p^2}} \right\} dz, \quad (1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} t_s(p) - t_p(p) &= \\ = \Delta t(p) &= \int_0^{z^*} \left\{ \frac{u_s^2(z)}{\sqrt{u_s^2(z) - p^2}} - \frac{u_p^2(z)}{\sqrt{u_p^2(z) - p^2}} \right\} dz, \quad (2) \end{aligned}$$

где $u_p(z) = v_p^{-1}(z)$ и $u_s(z) = v_s^{-1}(z)$ — величины, обратные скоростям распространения соответственно P - и SV -волн, которые, по аналогии с оптикой, мы будем называть показателями преломления относительно единичной скорости; p — параметр луча P - и SV -волны; $0 \leq p \leq u_p(z^* + 0)$. Здесь мы считаем, что значения $x_p(p)$, $x_s(p)$ и $t_p(p)$, $t_s(p)$ соответствуют одной и той же точке границе обмена, но различным точкам регистрации прямой P - и обменной SV -волны.

В рассматриваемой задаче прямая P - и обменная SV -волны проходят слой $0z^*$ насквозь, т.е. сейсмические лучи не имеют в этом слое точек поворота. Это означает, что если разбить слой $0z^*$ на элементарные слои и поменять эти слои местами, то времена пробега волн и расстояния от точки обмена до точек приема не изменятся. Следовательно, функции $v_p(z)$ и, соответственно, $v_s(z)$ не определяются по разности времен пробе-

га обменной SV -волны и прямой P -волны единственным образом, так как разным скоростным функциям $v_p(z)$, имеющим одну и ту же меру $H(u)$, где

$$H(u) = \text{mes}\{z: z \leq z^*, v_p^{-1}(z) \leq u\},$$

соответствуют одни и те же времена пробега продольных сейсмических волн $t(p)$ [Гервер, Маркушевич, 1967]. По определению функция $H(u)$: а) не убывает; б) равна нулю при $-\infty < u \leq u^* = u(z^* - 0)$; в) равна $h = z^*$ при $u(0) = u_0 \leq u < \infty$. Здесь u^* и u_0 — соответственно минимальное и максимальное значения функции $u(z) = v_p^{-1}(z)$ в слое над границей обмена.

Поставим задачу из уравнения (1) и (2) определить функцию $H(u)$ и, следовательно, глубину границы обмена и минимальные и максимальные значения скоростей соответствующих сейсмических волн в слое над этой границей.

Положим $u(z) = u_p(z)$, тогда уравнения (1) и (2) могут быть записаны в виде

$$\Delta x(p) = \int_0^{z^*} \left\{ \frac{p}{\sqrt{u^2(z) - p^2}} - \frac{p}{\sqrt{k^2 u^2(z) - p^2}} \right\} dz, \quad (3)$$

$$\Delta t(p) = \int_0^{z^*} \left\{ \frac{k^2 u^2(z)}{\sqrt{k^2 u^2(z) - p^2}} - \frac{u^2(z)}{\sqrt{u^2(z) - p^2}} \right\} dz. \quad (4)$$

Запишем уравнения (3) и (4) в виде интегралов Стильбеса

$$\Delta x(p) = \int_{u^*}^{u_0} \left\{ \frac{1}{\sqrt{u^2 - p^2}} - \frac{1}{\sqrt{k^2 u^2 - p^2}} \right\} dH(u), \quad (5)$$

$$\Delta t(p) = \int_{u^*}^{u_0} \left\{ \frac{k^2 u^2}{\sqrt{k^2 u^2 - p^2}} - \frac{u^2}{\sqrt{u^2 - p^2}} \right\} dH(u), \quad (6)$$

где $0 \leq p \leq u(z^* + 0) = u^* \leq u \leq u_0$; $dH(u) \geq 0$.

Умножим правую и левую части уравнения (6) на $p/\sqrt{w^2 - p^2}$ и проинтегрируем полученное выражение по параметру p в пределах p_1 и p_2 . В результате будем иметь

$$\begin{aligned} g(w) &= \int_{p_1}^{p_2} \frac{\Delta t(p) p dp}{\sqrt{w^2 - p^2}} = \int_{p_1}^{p_2} \frac{p}{\sqrt{w^2 - p^2}} \times \\ &\times \left\{ \int_{u^*}^{u_0} \left\{ \frac{k^2 u^2}{\sqrt{k^2 u^2 - p^2}} - \frac{u^2}{\sqrt{u^2 - p^2}} \right\} dH(u) \right\} dp, \end{aligned}$$

где $0 \leq p_1 \leq p \leq p_2 \leq u^* \leq w \leq u_0$.

В правой части последнего уравнения поменяем местами интегралы, тогда получим

$$g(w) = k^2 \int_{u^*}^{u_0} u^2 dH(u) \int_{p_1}^{p_2} \frac{p dp}{\sqrt{(w^2 - p^2)(k^2 u^2 - p^2)}} - \int_{u^*}^{u_0} u^2 dH(u) \int_{p_1}^{p_2} \frac{p dp}{\sqrt{(w^2 - p^2)(u^2 - p^2)}}.$$

Внутренние интегралы в последних уравнениях равны

$$K_1(w, u) = \int_{p_1}^{p_2} \frac{p dp}{\sqrt{(w^2 - p^2)(u^2 - p^2)}} = \ln \frac{\sqrt{w^2 - p_1^2} + \sqrt{u^2 - p_1^2}}{\sqrt{w^2 - p_2^2} + \sqrt{u^2 - p_2^2}},$$

$$K_2(w, u) = \int_{p_1}^{p_2} \frac{p dp}{\sqrt{(w^2 - p^2)(k^2 u^2 - p^2)}} = \ln \frac{\sqrt{w^2 - p_1^2} + \sqrt{k^2 u^2 - p_1^2}}{\sqrt{w^2 - p_2^2} + \sqrt{k^2 u^2 - p_2^2}}.$$

Окончательно уравнение, определяющее функцию $H(u)$, запишется в виде

$$g(w) = \int_{u^*}^{u_0} u^2 \{k^2 K_2(w, u) - K_1(w, u)\} dH(u). \quad (7)$$

Таким образом, мы получили интегральное уравнение Фредгольма первого рода относительно функции $H(u)$, которая удовлетворяет условию

$$dH(u) \geq 0. \quad (8)$$

Лучевой параметр p пробегает значения в интервале $[p_1, p_2]$, где $p_1 = t'(x_{\min}) \geq 0$, $p_2 = t'(x_{\max}) \leq u^*$, если годографы обращены выпуклостью вниз и $p_1 = t'(x_{\max}) \geq 0$, $p_2 = t'(x_{\min}) \leq u^*$, если годографы обращены выпуклостью вверх. Указанный интервал изменения лучевого параметра должен быть достаточно широким. В этом случае определение скорости распространения сейсмических волн будет более устойчивым. Чтобы это условие было выполнено, необходимо зарегистрировать обменные волны от землетрясений в достаточно большом диапазоне или глубин, или эпицентральных расстояний.

Систему уравнений, аналогичную (7), можно получить, если умножить правую и левую части уравнения (5) на $1/\sqrt{w^2 - p^2}$ и проинтегрировать

полученное выражение по параметру p в пределах p_1 и p_2 . Проводя соответствующие преобразования, получим

$$f(w) = \int_{p_1}^{p_2} \frac{\Delta x(p) dp}{\sqrt{w^2 - p^2}} =$$

$$= \int_{u^*}^{u_0} \{K_1(w, u) - K_2(w, u)\} dH(u). \quad (9)$$

Функции $f(w)$ и $g(w)$ можно записать в виде, удобном для численного интегрирования

$$f(w) = f_p(w) - f_s(w), \quad g(w) = g_s(w) - g_p(w),$$

$$\text{где } f_Q(w) = x(p_2) \arcsin \frac{p_2}{w} - x(p_1) \arcsin \frac{p_1}{w} - \int_{x_1}^{x_2} \arcsin \frac{t'(x)}{w} dx, \quad g_Q(w) = t(p_1) \sqrt{w^2 - p_1^2} - t(p_2) \sqrt{w^2 - p_2^2} + \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{w^2 - t'^2(x)} t'(x) dx, \quad Q = \{P, S\}.$$

ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ

1. Для решения уравнений (7) или (9) при условии (8) перейдем к их дискретизации, разбив сегмент $[u^*, u_0]$ N точками на $N - 1$ частичных сегментов $[u_j, u_{j+1}]$. Рассмотрим на сегменте $[u^*, u_0]$ функцию скачков ΔH_j ($j = 1, 2, \dots, N$). В этом случае будем иметь две системы N уравнений линейных относительно N неизвестных ΔH_j и нелинейных относительно неизвестных u_0 и u^* . Запишем эти системы в виде

$$Ay - f = 0 \text{ и } By - g = 0, \quad (10)$$

где $A = \{a_{ij}\}$, $B = \{b_{ij}\}$; $f^T = \{f_i\}$; $g^T = \{g_i\}$; $y^T = \{\Delta H_j\}$; $i = 1, 2, \dots, N$; $j = 1, 2, \dots, N$;

$$a_{ij} = \left\{ \ln \frac{\sqrt{w_i^2 - p_1^2} + \sqrt{u_j^2 - p_1^2}}{\sqrt{w_i^2 - p_2^2} + \sqrt{u_j^2 - p_2^2}} - \ln \frac{\sqrt{w_i^2 - p_1^2} + \sqrt{k^2 u_j^2 - p_1^2}}{\sqrt{w_i^2 - p_2^2} + \sqrt{k^2 u_j^2 - p_2^2}} \right\}$$

при $i = N + 1, N + 2, \dots, 2N$; $w_i = w_{2i}$ при $i = 1, 2, \dots, N$.

$$b_{ij} = u_j^2 \left\{ k^2 \ln \frac{\sqrt{w_i^2 - p_1^2} + \sqrt{k^2 u_j^2 - p_1^2}}{\sqrt{w_i^2 - p_2^2} + \sqrt{k^2 u_j^2 - p_2^2}} - \ln \frac{\sqrt{w_i^2 - p_1^2} + \sqrt{u_j^2 - p_1^2}}{\sqrt{w_i^2 - p_2^2} + \sqrt{u_j^2 - p_2^2}} \right\}$$

при $i = 1, 2, \dots, N$.

При этом неизвестные величины ΔH_j должны удовлетворять линейным ограничениям

$$\Delta H_j \geq 0. \quad (11)$$

Очевидно, что если величины u_0 и u^* неизвестны, то системы (10) недоопределены и, вообще говоря, не имеют единственного решения. Предположим, что величины u_0 и u^* известны.

Рассмотрим функционал

$$J = \|Au - f\|^2. \quad (12)$$

В качестве решения задачи примем вектор u , минимизирующий функционал J при ограничениях (11). Таким образом мы определим распределение скорости распространения P -волн при условии, что значение величины k , т.е. отношения скоростей P - и S -волн, постоянно и известно.

Задача минимизации функционала (12) при линейных ограничениях (11) и при известных значениях u_0 и u^* является задачей квадратичного программирования [Карманов, 1975]. Если матрицы A и B не вырождены вместе, то задача квадратичного программирования имеет единственное решение, так как выпуклый по u функционал J ограничен снизу и непрерывен на выпуклом множестве $Y = \{u | u \geq 0\}$ [Карманов, 1975]. Стандартным методом решения задачи квадратичного программирования является метод сопряженных градиентов. Этот метод всегда сходится за конечное число шагов, но требует начального или нулевого приближения [Никашева, 1968]. В качестве нулевого приближения могут быть приняты средняя скорость сейсмической волны в слое и соответствующая ей мощность слоя.

2. Рассмотрим задачу определения скорости сейсмических волн в слое и положение границы обмена в предположении, что скорости P - и SV -волн в слое постоянны. В этом случае $n = 1$, $u_i = u$, $w_j = u$, $u = \text{const}$ и уравнения (7) и (9) запишутся в виде

$$\begin{aligned} f(u) &= \{K_1(u) - K_2(u)\} \Delta H, \\ g(u) &= u^2 \{k^2 K_2(u) - K_1(u)\} \Delta H. \end{aligned} \quad (13)$$

Деля второе уравнение на первое, получим

$$\frac{g(u)}{f(u)} = u \frac{k^2 K_2(u) - K_1(u)}{K_1(u) - K_2(u)}. \quad (14)$$

Решая последнее уравнение, найдем значение u . Подставляя u в одно из уравнений (13), находим значение ΔH .

Уравнение (14) легко решается методом простой итерации, который в данном случае сходится к решению практически при любом начальном приближении, т.е. является достаточно устойчивым.

3. По-видимому, одним из основных вопросов при решении рассматриваемой задачи является вопрос единственности ее решения, а точнее выяснения условий, при которых решение является единственным. Как уже упоминалось выше, разным скоростным функциям $v_p(z)$, имеющим одну и ту же меру $H(u)$, соответствуют одни и те же времена пробега продольных сейсмических волн. В этом случае вопрос единственности решения нашей задачи сводится к исследованию единственности или не единственности решения систем нелинейных уравнений (10). Как известно, в общем случае ответ на этот вопрос остается открытым. В данном случае мы ограничились исследованием численной устойчивости решения. Предположим, что наша задача имеет единственное решение в классе монотонных скоростных функций, убывающих или возрастающих. Тогда встает вопрос: как определить пределы интегрирования в правых частях интегралов (7) и (9). Как и в работах [Бурмин, 1988; 1992], учитывая, что искомое распределение скорости P -волны в слое есть некоторая функция координаты z : $u = u(z)$ и $u(0) = u_0$, $u(z^*) = u^*$, доопределим функцию $u = u(z)$ таким образом, чтобы новая функция $\tilde{u} = \tilde{u}(z)$ совпала с функцией $u = u(z)$ всюду на сегменте $[0, z^*]$, кроме, быть может, конечного числа точек сегмента. А именно, для сохранения монотонности $\tilde{u} = \tilde{u}(z)$ доопределим функцию $u = u(z)$ на концах сегмента $[0, z^*]$, положив $u_0 = u_{\max} \geq u(0)$ и $u^* = u_{\min} = p_2 \leq u(z^*)$. Здесь u_{\max} соответствует максимальному значению показателя преломления и $u(z)$ на верхней границе слоя $0z^*$ и, как правило, всегда может быть задано априори. u_{\min} не меньше значения производной годографа P -волны в крайней правой его точке или, например, если исследуется земная кора, не меньше значения обратной величины скорости в мантии. Очевидно, в этом случае значение интегралов (5) и (6) не изменится и, в силу предположения о единственности решения задачи, полученное распределение функции $\tilde{u}(z)$ будет отличаться от истинного только в слоях нулевой мощности. В процессе численного решения задачи крайние значения u_{\max} и u_{\min} уточняются путем итерационной процедуры. Делается это следующим образом. На первом шаге задача решается для крайних значений $u^{*0} = u_{\min}$ и $u_0^0 = u_{\max}$. Затем в качестве u^* и u^0 берутся те крайние значения u_i и u_j , для которых ΔH_i и ΔH_j не равны нулю (больше нуля при заданной точности вычислений). Снова решается задача, но уже для новых крайних значений $u^* = u_i$ и $u_0 = u_j$. И так далее, до тех пор, пока крайние значения ΔH_1 и ΔH_N не становятся отличными от нуля.

4. В левую часть уравнений (7) и (9) входит параметр луча p прямой продольной волны, численно равный производной годографа $t(x)$. Опреде-

ление $p = t'(x)$, в зависимости от системы наблюдений, можно осуществить различными путями. Если проводятся профильные наблюдения, то для определения скорости сейсмических волн и положения границы обмена достаточно одного события. Если наблюдения ведутся в одной точке, то необходимо зарегистрировать достаточное количество событий, произошедших на одной глубине на разных эпицентральных расстояниях. В обоих случаях будем иметь наблюдаемые годографы. Причем во втором случае годограф всегда будет близок к годографу, которому отвечает вертикально-неоднородная среда. Здесь мы не будем конкретизировать, что понимается под близостью годографов, так как в данном случае это не имеет сколько-нибудь существенного значения. Экспериментальный годограф, заданный с погрешностями дискретным набором точек, в этом случае следует сгладить некоторой кривой обращенной выпуклостью вверх или вниз, в зависимости от того, какая ветвь годографа рефрагированной волны (до точки перегиба или после, прямая ветвь или обратная) рассматривается. В качестве такой кривой следует взять выпуклый кубический сплайн $T(x)$ [Бурмин, 1980], который минимизирует функционал

$$S = \|BT'' - y\|^2 \quad (15)$$

при следующих ограничениях

$$T_i'' \leq 0 \quad (T_i'' \geq 0), \quad (16)$$

где $i = 1, 2, \dots, N$; T_i'' – вторые производные сплайна $T(x)$ в точках x_i ; B – квадратная матрица размерности $N \times N$, элементы которой зависят только от x_i ; y – вектор свободных членов, зависящий от значений годографа $t(x_i)$ в точках наблюдений x_i . Задача минимизации функционала (15) при линейных ограничениях (16) так же является задачей квадратичного программирования [Карманов, 1975].

Для того чтобы вычислить интегралы в левых частях уравнений (7) и (9), необходимо определить точки годографов P - и SV -волн с одинаковыми значениями лучевых параметров p_1 и p_2 . Для этого можно воспользоваться интерполяционными формулами для самого кубического сплайна и его первой производной через значения второй производной сплайна в узлах сетки [Алберг и др., 1972].

5. Оценим погрешность в определении глубины границы обмена. Пусть истинное значение этой глубины равно z^* . Предположим, что в результате определений было получено значение глубины границы, равное \tilde{z}^* и что скорость в слое $z^* \tilde{z}^*$ постоянна. Тогда для $\delta \Delta t = \tilde{\Delta t} - \Delta t$ и $\delta \Delta x = \tilde{\Delta x} - \Delta x$ при условии $u(z) = u = \text{const}$, $z \in [z^*, \tilde{z}^*]$, будем

иметь

$$\delta \Delta t = \left\{ \frac{ku^2}{\sqrt{k^2 u^2 - p^2}} - \frac{u^2}{\sqrt{u^2 - p^2}} \right\} \delta z,$$

$$\delta \Delta x = \left\{ \frac{p}{\sqrt{u^2 - p^2}} - \frac{p}{\sqrt{k^2 u^2 - p^2}} \right\} \delta z.$$

Принимая в качестве отклонения разности теоретических годографов $\Delta t = \Delta t(x)$ от экспериментального $\tilde{\Delta t} = \tilde{\Delta t}(x)$ величину

$$\delta \Delta \tau(p) = \sqrt{[\delta \Delta t(p)]^2 + [p \delta \Delta x(p)]^2},$$

будем иметь

$$\delta z(p) \leq \sqrt{2 \frac{u^2 - p^2}{u^4 + p^4}} \delta \tau(p). \quad (17)$$

Формула (17) связывает величину ошибки в определении z^* с величиной погрешности $\delta \tau$ в точке годографа, соответствующей сейсмическому лучу с параметром p . Если решение задачи ищется по участку годографа, ограниченному лучами с параметрами p_1 и p_2 , то ошибку в определении z^* можно определить как среднюю величину для всех значений $p \in [p_1, p_2]$ из соотношения

$$\begin{aligned} |\Delta z| &\geq \frac{1}{p_2 - p_1} \int_{p_1}^{p_2} |\delta z(p)| dp = \\ &= \frac{1}{p_2 - p_1} \int_{p_1}^{p_2} \sqrt{2 \frac{u^2 - p^2}{u^4 + p^4}} \delta \tau(p) dp \leq \\ &\leq \frac{\sqrt{2} |\Delta \tau|}{u^2 (p_2 - p_1)} \int_{p_1}^{p_2} \sqrt{u^2 - p^2} dp = \\ &= \frac{\sqrt{2}}{u^2 (p_2 - p_1)} \left\{ p \sqrt{u^2 - p^2} + u^2 \arcsin \frac{p}{u} \right\} \Big|_{p_1}^{p_2} |\Delta \tau|, \end{aligned} \quad (18)$$

где $|\Delta \tau| \in [|\delta \tau|_{\min}, |\delta \tau|_{\max}]$.

Из рассмотрения выражения (18) непосредственно видно, что: а) чем больше диапазон изменения лучевых параметров, тем устойчивее определение распределения скорости в изучаемом слое; б) погрешности, связанные с не горизонтальностью границы обмена, будут пропорциональны абсолютному значению угла наклона границы, так как в этом случае увеличиваются погрешности в определении Δt и Δx .

6. Остановимся на результатах математического моделирования. В качестве иллюстрации рассмотрим определение скоростей P - и SV -волн в ко-

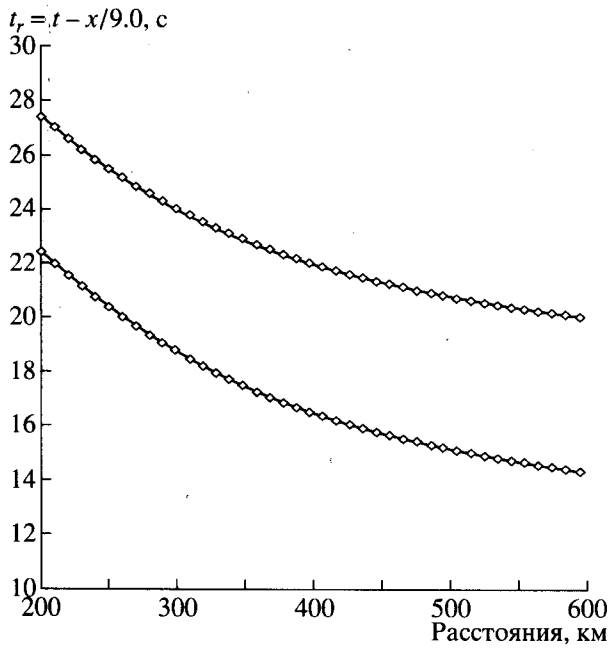


Рис. 1. Годографы прямой продольной и поперечной обменной волн.

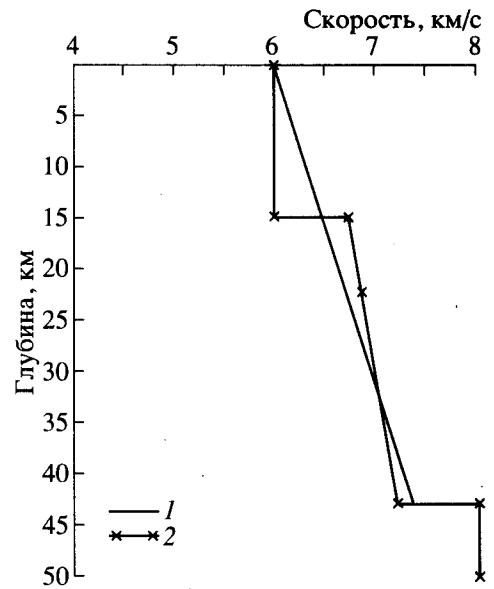


Рис. 2. Восстановление скоростной кривой для двухслойной модели земной коры по годографам, представленным на рис. 1. 1 – исходная скоростная кривая; 2 – восстановленная скоростная кривая.

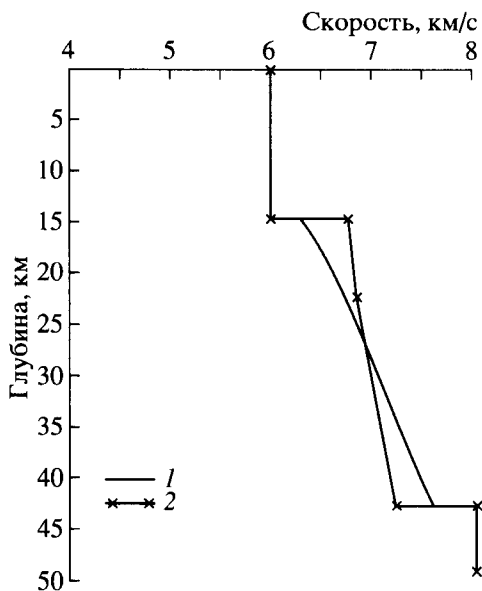


Рис. 3. Восстановление скоростной кривой в одном слое двухслойной модели земной коры по годографам, представленным на рис. 1: 1 – исходная скоростная кривая; 2 – восстановленная скоростная кривая.

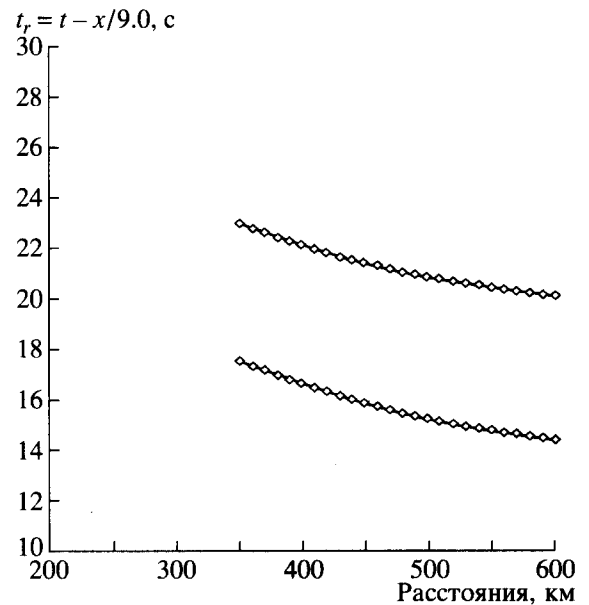


Рис. 4. Укороченные годографы прямой продольной и поперечной обменной волн.

ре Земли для модели, близкой к стандартной. Теоретические годографы P - и SV -волн в редукции 9 км/с представлены на рис. 1. Годографы соответствуют сейсмическим волнам, распространяющимся вверх от источника, расположенного на глубине 250 км, а обмен происходит на границе Мохоровичича на глубине 43.0 км. Производные годографов

на концах равны обратным величинам кажущихся скоростей, соответственно, ≈ 15.0 и 9.5 км/с. Результаты определения скоростей продольных волн в коре по разности годографов P - и SV -волн приведены на рис. 2 и 3. Исходная скоростная кривая отвечает двухслойной коре со скоростями P -волн 6.0 км/с в первом слое и 6.75 на верхней

границе и 6.84 км/с на нижней границе второго слоя. Отношение скоростей продольных и поперечных волн принято 1.73. В качестве крайних значений скорости при решении задачи приняты значения 4.0 и 8.0 км/с. Этот интервал скоростей разбивается на сорок частичных сегментов. Интегралы в левых частях уравнений (7) и (9) вычисляются с помощью формулы Симпсона.

На рис. 2 приведены результаты восстановления скоростной кривой в предположении, что скорость продольных волн во всей коре неизвестна. Как видно из рисунка, мощность слоя и скорость в слое, в смысле среднего значения, определяются достаточно хорошо, однако полученная скоростная кривая совершенно не отражает скачка скорости внутри слоя.

На рис. 3 приведены результаты восстановления скоростной кривой в предположении, что скорость продольных волн известна в первом слое, но не известна во втором слое. В этом случае найденное распределение скорости в слое близко к заданному в модели.

На рис. 4 и 5 приведены укороченные годографы и соответствующая им восстановленная скоростная во втором слое. Кажущиеся скорости на концах годографа меняются от 11.2 до 9.5 км/с. В этом случае скоростная кривая определяется с большими погрешностями, но средняя скорость и мощность слоя определяются так же устойчиво, как и в предыдущем случае.

Численные эксперименты также показали, что для хорошего определения параметров слоя (скорости и мощности) точность снятия времен прихода сейсмических волн на длинных годографах (рис. 1) должна быть не хуже 0.05 с, а для коротких годографов (рис. 4) не хуже 0.01 с. В противном случае решение задачи становится сильно неустойчивым. Основной причиной сильной неустойчивости является недостаточная точность в определении по годографам кажущихся скоростей сейсмических волн, а точнее зависимостей $x(p)$ и $t(p)$ для P - и SV -волн.

Таким образом, на основании результатов расчетов можно сделать вывод, что в классе рассматриваемых функций, т.е. монотонных ступенчатых, положительных функций $H(u)$, задача восстановления скоростной кривой по разности годографов обменной поперечной и прямой продольной волн имеет единственное решение, так как оно не зависит от выбора крайних значений u_{\max} и u_{\min} (см. выше) и начального приближения $H_0(u)$. Тем не менее численное решение задачи требует дальнейшего его изучения и поиска устойчивых методов

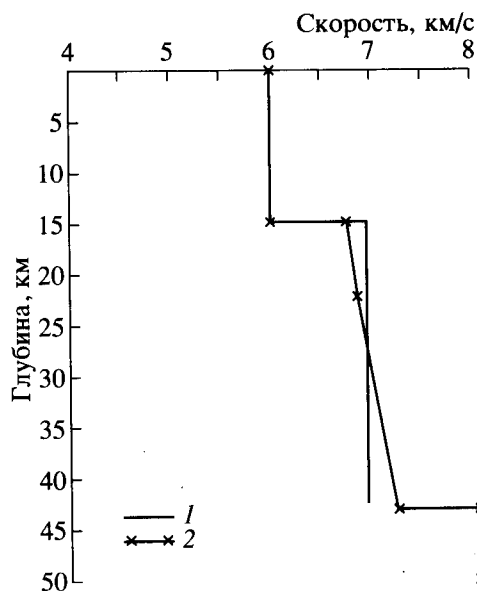


Рис. 5. Восстановление скоростной кривой для двухслойной модели земной коры по годографам, представленным на рис. 4: 1 — исходная скоростная кривая; 2 — восстановленная скоростная кривая.

ее решения.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Несмотря на устоявшееся мнение, что по записям обменных волн не возможно определить скорость распространения сейсмических волн, в работе показано, что можно определять не только средние скорости, но и распределение скорости по вертикали под сейсмической станцией. Для этого получены интегральные уравнения Фредгольма первого рода, связывающая скорости распространения продольных сейсмических волн и разности годографов обменных поперечных и прямых продольных волн, распространяющихся в вертикально-неоднородной упругой среде в предположении, что отношение скоростей продольных и поперечных волн в слое выше границы обмена постоянно и известно.

Для того чтобы получить годографы P - и SV -волн, достаточно регистрировать землетрясения с одинаковыми глубинами гипоцентров, но на разных эпицентральных расстояниях только в одной точке наблюдений. Чем больше диапазон изменения лучевых параметров, тем устойчивее определение распределения скорости в изучаемом слое. В результате таких наблюдений годографы сейсмических волн будут соответствовать вертикально-неоднородной среде только под точкой наблюдений (под сейсмической станцией). Имея достаточное количество таких точек, можно построить трехмерное распределение сейсмических скоростей в изучаемом слое внутри земли.

Основным камнем преткновения в определении параметров слоев по разности времен прихода P - и PS -волн является необходимость определять времена прихода сейсмических волн с высокой точностью, не хуже 0.01 с. Эта проблема не новая и актуальна при решении ряда других обратных кинематических и динамических задач сейсмологии. Так, Г. Нолет в обзорной статье, посвященной задачам сейсмической томографии [Нолет, 1990], говорит о том, что для адекватного решения задач томографии полезнее увеличивать точность измерений, чем объем данных, поскольку точность данных в значительной степени определяет число итераций, а, по сути, сходимость того или иного численного метода. В нашем случае ситуация совершенно аналогичная, хотя, вероятно, имеются возможности стабилизировать решение задачи на этапе определения функций $x(p)$ и $t(p)$ для P - и SV -волн.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- Алберг Дж., Нилсон Э., Уолли Дж. Теория сплайнов и ее приложения. М.: Мир, 1972. 316 с.
- Андреев С.С. Изучение глубинного строения земной коры при помощи обменных волн PS , регистрируемых при землетрясениях // Изв. АН СССР. Сер. геофиз. 1957. № 1. С. 21–29.
- Булин Н.К. Определение глубины складчатого фундамента при помощи обменных проходящих волн типа PS , регистрируемых при землетрясениях // Изв. АН СССР. Сер. геофиз. 1960. № 6. С. 781–786.
- Бурмин В.Ю. Аппроксимация сейсмического годографа выпуклыми сплайнами // Изв. АН СССР. Сер. Физика Земли. 1980. № 2. С. 90–96.
- Бурмин В.Ю. Обращение годографа сейсмической волны, распространяющейся от глубинного источника // Вулканология и сейсмология. 1988. № 6. С. 62–71.
- Бурмин В.Ю. Численное обращение годографа отраженной волны // Геофизический журнал. 1992. Т. 14. № 1. С. 72–81.
- Гальперин Е.И., Гальперина Р.М., Фролова А.В., Эренбург М.С. Волновые поля в методе обменных волн землетрясений. М.: ОИФЗ РАН, 1995. 192 с.
- Гервер М.Л., Маркушевич В.М. Определение по годографу скорости распространения сейсмических волн // Вычислительная сейсмология. Вып. 3. М.: Наука, 1967. С. 3–51.
- Карманов В.Г. Математическое программирование. М.: Наука, 1975. 272 с.
- Никашова М.М. Алгоритм решения задачи квадратичного программирования методом сопряженных градиентов. М.: ВЦ МГУ, 1968. 11 с.
- Нолет Г. Распространение сейсмических волн и сейсмическая томография // Сейсмическая томография. М.: Мир, 1990. С. 9–33.
- Померанцева И.В., Мозженко А.Н. Сейсмические исследования с аппаратурой “Земля”. М.: Недра, 1977. 256 с.
- Hasegawa M. Die Wirkung der obersten Erdschicht auf die Anfangsbewegung einer erdbeben Wellen // Z. fur Geophysik. 1930. Bd. 6. № 2. S. 78–98.

Статья рекомендована к печати членом редколлегии д-ром физ.-мат. наук Л.П. Винником.