

УДК 550.311

© 1994 г. БУРМИН В. Ю.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ СКОРОСТИ РАСПРОСТРАНЕНИЯ СЕЙСМИЧЕСКИХ ВОЛН В МАНТИИ И РАДИУСА ЯДРА ЗЕМЛИ ПО ВРЕМЕНАМ ПРОБЕГА P - И PcP -ВОЛН

Рассмотрены задачи численного обращения годографов рефрагированных и отраженных волн. На основе полученных результатов проведено определение распределения скорости распространения сейсмических волн в мантии и положения границы внешнего ядра Земли по данным от землетрясений и ядерным взрывам, полученным ранее различными авторами.

DETERMINATION OF VELOCITY OF PROPAGATION OF SEISMIC WAVES IN MANTLE AND RADIUS EARTH'S CORE BY ARRIVAL TIMES OF P - AND PcP -WAVES, by Bourmin V. Yu. The problem of numerical inversion travel-times refraction and reflection waves are solved. The velocity of propagation of seismic waves and the position of the boundary of outer Earth's core by data from earthquakes and nuclear explosions are determined.

(Received June 20, 1993)

Institute of the Physics of the Earth, Russian Academy of Sciences, Moscow, 123810, Russia

В 1939 г. Г. Джеффрис провел определение скоростного разреза Земли по временам пробега сейсмических волн от землетрясений [25] и получил значение радиуса ядра Земли, равное 3473 ± 3 км [24]. Для определения глубины границы ядра Земли использованы годографы S - и ScS -волн. Годографы PcP -волн для определения положения границы ядра не были использованы, так как точки годографа имели большой разброс.

В. Гутенберг и К. Рихтер [21], анализируя времена пробега PcP -волн, получили значение радиуса ядра Земли, близкое к значению, полученному Г. Джеффрисом.

Позднее различные авторы предпринимали попытки уточнить скоростной разрез мантии и величину радиуса ядра Земли по временам пробега сейсмических волн от мощных взрывов. В большинстве случаев методика определения глубины границы ядра Земли заключалась в подборе глубины границы и скорости сейсмических волн над ядром по временам пробега PcP -волн по скоростному разрезу мантии Земли, полученному по годографу P -волны.

Дж. Таггарт и Э. Энгдал [27], основываясь на новых таблицах времен пробега P -волн от землетрясений и ядерных взрывов [23], дали значение радиуса ядра Земли, равное 3477 ± 2 км.

С. Д. Коган считала [9], что наиболее вероятные пределы для величины внешнего ядра Земли равны 3477—3485 км.

Т. Б. Яновская [12], используя данные, приведенные Дж. Таггартом и Э. Энгдалом, и пересчитывая годограф рефрагированной волны Е. Херрина и др. [23] в годограф отраженной волны [11], определила 90%-ную доверительную область для радиуса ядра Земли и градиента скорости над границей ядра. Крайние значения радиуса ядра в этой области оказались равными 3474,5 и 3478,8 км.

Б. Болт предложил метод определения радиуса ядра и скорости на подошве мантии по данным о кажущихся скоростях скользких лучей и временах пробега

волн PcP вдоль вертикальных лучей [14]. По данным Б. Болта, радиус земного ядра составляет 3475 ± 2 км [15].

В более поздних работах различных авторов наметилась тенденция к увеличению значения радиуса ядра Земли по отношению к значению, данному Г. Джеффрисом, на 10—15 км. При этом в качестве скоростной модели мантии принималась, как правило, стандартная модель, определенная по данным о собственных колебаниях Земли [17].

Ф. Гильберт с соавт. [20] предполагали, что значение величины радиуса ядра $3482—3485$ км.

А. Холс и Дж. Робертс [22] по разности времен пробега ScS - и S -волн, используя две различные скоростные модели S -волн для нижней мантии, получили оценки величины радиуса ядра, равные $3489,92 \pm 4,66$ и $3486,10 \pm 4,59$ км.

Э. Энгдал и Л. Джонсон [18], обращая времена пробега короткопериодных PcP - и P -волн методом Бейкуса — Гильберта, получили значение радиуса земного ядра $3484,2 \pm 2,9$ км.

Д. Джордан [26], изучая разницу времен пробега короткопериодных PcP - и P -волн от поверхностных источников и длиннопериодных PcP - и P -волн от глубокофокусных источников, нашел значение радиуса ядра, равное 3485 км.

В настоящее время значение величины радиуса ядра Земли считается равным 3480 км [16]. Это значение получено путем совместной интерпретации данных объемных волн и собственных колебаний Земли и в лучшей степени удовлетворяет и тем и другим данным сразу. Очевидно, что большой разброс значений радиуса ядра Земли, полученных по временам пробега объемных волн, связан в основном с двумя причинами. Первая причина — несовершенство методики интерпретации годографов, вторая — значительная степень разнородности данных, используемых при интерпретации. Для уточнения величины радиуса земного ядра проведены анализ наиболее полных данных о временах пробега объемных сейсмических волн и их интерпретация по изложенной выше методике. Рассмотрены сглаженные годографы P - и PcP -волн, построенные С. Д. Коган [8, 9], и несглаженные годографы P -волн, полученные Е. Херрином и др. (эти годографы приведены в работе [13]), и PcP -волн, полученные Дж. Таггартом и Э. Энгдалом [27].

Определение скоростной кривой по экспериментальному годографу рефрагированной волны. Задачу определения скоростной кривой в мантии решали в предположении, что поверхность Земли является плоскостью. Для этого необходимо было перейти от годографа, полученного в координатах θ, t , к годографу в координатах x, t [5]. Здесь θ — расстояние в градусах для сферической Земли; x — расстояние в километрах для плоской Земли; t — время пробега сейсмической волны, одинаковое для сферической и плоской моделей Земли. Координаты θ и x связаны формулой

$$x = \pi\theta R/180,$$

где R — радиус Земли.

В результате решения плоской задачи получаем скоростную зависимость от глубины $v(z)$, где глубина z отсчитывается от дневной поверхности земли. Переход от скоростной зависимости $v(z)$ к $v(r)$, где r — расстояние от центра Земли до рассматриваемой точки, осуществлялся по формулам [5]

$$r = R \exp[-z/R], \quad v(r) = \exp[-z/R] v(z).$$

Далее будем различать два типа сейсмических волн, распространяющихся в упругой среде.

1. Рефрагированные (проникающие) волны, соответствующие лучам с различными глубинами максимального проникновения z_m . Для рефрагированных волн, для любых двух лучей, вышедших на древнюю поверхность под углами $\varphi, \psi \in [0, \pi/2]$, отсчитываемыми от вертикали, из соотношений $\varphi < \psi$ следует соотношение $z(\psi) < z(\varphi)$.

2. Однократно отраженные волны, связанные со скачками скорости в упругой среде на глубинах $z = z_i^*$ ($i = 1, 2, \dots, n$). Для волны, отраженной от границы $z = z_j^*$, для всех лучей с углами выхода $\varphi \in [0, \varphi_n]$, где φ_n — угол, соответствующий предельному лучу, справедливы соотношения $z(\varphi) = z^*$.

Уравнения годографа можно записать в параметрическом виде

$$x(p) = 2p \int_0^{z_m} \frac{dz}{(v^{-2}(z) - p^2)^{1/2}}, \quad t(p) = 2 \int_0^{z_m} \frac{dz}{v^2(z) (v^{-2}(z) - p^2)^{1/2}}, \quad (1)$$

где $p = t'(x)$ — параметр сейсмического луча, численно равный производной годографа в соответствующей точке; z_m — глубина максимального проникновения луча с параметром p .

Поскольку сейсмический луч начинается на дневной поверхности, он имеет точку поворота (x_m, z_m) . Для рефрагированной волны в этой точке справедливы равенства $z_m = z(p)$. Для отраженной волны $z_m = z^*$.

Если скоростная функция $v = v(z)$ до некоторой глубины $z = z^*$ известна, то формула обращения годографа рефрагированной волны записывается в виде [2]

$$z(q) = z^* + \frac{1}{\pi} \int_0^{x(q, u^*)} \text{Arch}(p/q) dx(p, u^*), \quad (2)$$

где

$$x(p, u^*) = x(p) - 2p \int_0^{z^*} \frac{d\eta}{(v^{-2}(\eta) - p^2)^{1/2}}; \quad z^* \leq z_m \leq z_M; \quad q = t'(x_m).$$

Формула (2) позволяет определять глубину максимального проникновения луча, вышедшего на расстоянии $x(p)$ от источника, которая вместе с соотношением

$$v^{-1}(z_m) = u(z_m) = t'[x(q)], \quad (3)$$

дающим скорость сейсмической волны на глубине $z_m = z(q)$, определяет искомую зависимость $v = v(z)$ в параметрическом виде для $z^* \leq z_m \leq z_M$; $x(p, u^*)$ — расстояние до точки выхода сейсмического луча, проникшего на глубину $z_m \geq z^*$, от места его входа на глубине $z = z^*$, зависящее от параметра луча p .

Если $z^* = 0$ и годограф представлен простой гладкой кривой с монотонно убывающей производной, то [10]

$$z(q) = \frac{1}{\pi} \int_0^{x(q)} \text{Arch}(p/q) dx(p, u^*). \quad (4)$$

В тех случаях, когда на годографе имеются ветви возврата, чтобы воспользоваться формулой (2), годограф следует разбить на прямые ветви и ветви возврата и интерпретировать последовательно каждую ветвь.

Если в упругой среде имеется слой с постоянной скоростью (в том числе и слой с пониженной скоростью), который начинается на глубине z^* , то решение задачи обращения годографа дается формулой (2) и формулами, определяющими скорость сейсмической волны в слое и мощность этого слоя [2]:

$$v^* = (v(z^*)v)^{1/2}, \quad \Delta z^* = \frac{\Delta x}{2} \left(\frac{v(z^*)}{v} - 1 \right)^{1/2}, \quad (5)$$

$$z^* = z^* + \Delta z^*,$$

где $v = \Delta x / \Delta t$. Величины $v(z^*)$, Δx , Δt определяются непосредственно из годографа

после того, как $v(z)$ определена в слое Oz^* по первой ветви годографа. Существенно, что параметры этого слоя определяются по формулам (5) без привлечения годографов отраженной и головной волн.

Пусть наблюдаемый годограф рефрагированной волны представлен конечным набором прямых и обратных ветвей [2] и задан дискретным набором точек с некоторыми случайными погрешностями. Чтобы воспользоваться формулами обращения годографа, необходимо отдельные ветви годографа сгладить некоторыми функциями $T(x)$, обращенными выпуклостью вверх для прямых ветвей годографа и выпуклостью вниз — для обратных. В работе [1] в качестве таких функций построены выпуклые кубические сплайн-функции, которые минимизируют функционал

$$S = \sum_{i=1}^N [t(x_i) - T(x_i)]^2. \quad (6)$$

Задача построения выпуклой сплайн-функции сводится к задаче квадратичного программирования [6, 7] относительно вторых производных $T''(x)$ сплайна $T(x)$ в точках наблюдений x_i ($i = 1, 2, \dots, N$) [1].

После того как функция $T(x)$ определена и, следовательно, определены параметры луча $p = T'(x)$ в каждой точке сегмента $[0, x_M]$, изменение скорости с глубиной можно определить из соотношения

$$v^{-1}(z_m) = T'(x_m)$$

и формулы обращения годографа (2) с помощью подходящей квадратурой формулы [3, 4].

Представим среду в виде плоскопараллельных слоев. Границы слоев выбираем так, чтобы каждая точка экспериментального годографа была предельной точкой рефрагированной волны в соответствующем слое (первой точке отвечает дневная поверхность). Таким образом, среда разбивается на слои в соответствии с точками наблюдений, причем число слоев будет на одно меньше, чем точек на годографе. Учитывая, что на каждом сегменте $[x_i, x_{i+1}]$ экспериментальный годограф аппроксимируется кубической параболой

$$T(x) = a_0 + a_1(x - x_i) + a_2(x - x_i)^2 + a_3(x - x_i)^3,$$

где коэффициенты a_j ($j = 0, 1, 2, 3$) выражаются через значения сглаживающего сплайна и его вторых производных в узлах сетки Δ :

$$0 = x_0 < x_1 < \dots < x_N = x_m,$$

$$a_0 = \frac{1}{6h_i} \{-x_i^3 T_{i+1}'' + x_i h_i^2 T_{i+1}'' + x_{i+1}^3 T_i'' - x_{i+1} h_i^2 T_i + 6(-x_i T_{i+1} + x_{i+1} T_i)\},$$

$$a_1 = \frac{1}{6h_i} \{3x_i^2 T_{i+1}'' - h_i^2 T_{i+1}'' - 3x_{i+1}^2 T_i'' - h_i^2 T_i'' + 6(T_{i+1} - T_i)\},$$

$$a_2 = \frac{x_{i+1} T_i'' - x_i T_{i+1}''}{2h_i}, \quad a_3 = \frac{T_{i+1}'' - T_i''}{6h_i},$$

формулу обращения (2) можно записать в виде

$$z_N = z_m = \frac{1}{\pi} \sum_{i=1}^{N-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} \text{Arch} \left[\frac{a_1 + 2a_2(x - x_i) + 3a_3(x - x_i)^2}{T_N'} \right] dx.$$

Последняя формула, точная на кубическом сплайне, может быть записана в виде

$$z_N = z_{N-1} + \frac{1}{\pi} \int_{x_i}^{x_{i+1}} \text{Arch} \left[\frac{b_1 + 2b_2^* + 3b_3 x^{*2}}{T_N'} \right] dx, \quad (7)$$

где

$$x^* = x - 2p \int_0^{z_{N-1}} \frac{dz}{(u^2(z) - p^2)^{1/2}}; \quad 0 \leq x^* \leq x_{N-1}^*;$$

$$T'_N \leq p = b_1 + 2b_2x^* + 3b_3x^{*2} \leq T'_{N-1}.$$

Коэффициенты b_j ($j = 1, 2, 3$) определяются из системы линейных уравнений

$$\begin{cases} b_1 = T'_{N-1}, \\ b_2x_N^{*2} + b_3x_N^{*3} = T(x_N^*) - T'_{N-1}x_N^*, \\ 2b_2x_N^* + 3b_3x_N^{*2} = T'_N - T'_{N-1}, \end{cases} \quad (8)$$

$$x_N^* = x_N - 2p \int_0^{z_{N-1}} \frac{dz}{(u^2(z) - p^2)^{1/2}}; \quad p = T'_N;$$

$$T(x_N^*) = T(x_N) - 2 \int_0^{z_{N-1}} \frac{u^2(z) dz}{(u^2(z) - p^2)^{1/2}}; \quad T'_{N-1} = a_{N1};$$

$$T'_N = a_{N1} + 2a_{N2}(x_{N+1} - x_N) + 3a_{N3}(x_{N+1} - x_N)^2.$$

Решая систему (8), получим

$$b_2 = \frac{1}{x_N^*} \{3T(x_N^*)/x_N^* - T'_{N-1} - T'_N\},$$

$$b_3 = -\frac{1}{x_N^{*2}} \{2T'(x_N^*)/x_N^* - T'_{N-1} - T'_N\}.$$

Чтобы вычислить значение интеграла в формуле (7), разобьем сегмент $[0, x_N^*]$ на n частичных сегментов с равномерным шагом $h = x_N^*/n$ и аппроксимируем квадратичную параболу на каждом частичном сегменте h линейной функцией

$$\varphi_j(x^*) = c_{1j} + c_{2j}(x^* - x_j^*), \quad j = 1, 2, \dots, n+1.$$

В результате получим

$$\begin{aligned} z_N &= z_{N-1} + \frac{1}{\pi} \sum_{j=1}^n \int_{x_j^*}^{x_{j+1}^*} \text{Arch} \left[\frac{c_{1j} + c_{2j}(x^* - x_j^*)}{T'_N} \right] dx^* = \\ &= z_{N-1} + \frac{T'_N}{\pi} \sum_{j=1}^n \frac{1}{c_{2j}} \left\{ y_j \text{Arch}(y_j) - (y_j^2 - 1)^{1/2} - \frac{c_{1j}}{T'_N} \text{Arch} \left(\frac{c_{1j}}{T'_N} \right) + \left[\left(\frac{c_{1j}}{T'_N} \right)^2 - 1 \right]^{1/2} \right\}, \end{aligned}$$

где

$$y = \frac{c_{1j} + c_{2j}(x_{j+1}^* - c_j^*)}{T'_N} = \frac{c_{1j} + c_{2j}h}{T'_N}.$$

Коэффициенты c_{1j} и c_{2j} выражаются через коэффициенты кубической параболы по формулам

$$c_{1j} = b_1 + 2b_2x_j^* + 3b_3x_j^{*2},$$

$$c_{2j} = 2b_2 + 3b_3(x_{j+1}^* + x_j^*).$$

Обращение годографа отраженной волны. Предположим, что скоростная

кривая на некоторой глубине $z = z^*$ имеет скачок $\Delta v = v(z^* - 0) - v(z^* + 0)$. В этом случае годограф рефрагированной волны будет иметь разрыв. Если ветвь годографа, соответствующая волне, распространяющейся в слое над границей $z = z^*$, задана полностью, то положение границы определяется по этой ветви точно [2]. Однако на практике по различным причинам проследить годограф рефрагированной волны полностью не удастся и, следовательно, положение границы определится по годографу рефрагированной волны с ошибкой. В частности, при определении положения границы ядра Земли сталкиваемся с тем, что годограф рефрагированной волны непрерывно переходит в годограф дифрагированной волны, что затрудняет определение предельной точки годографа рефрагированной волны. Чтобы определить положение границы и значение скорости над границей, необходимо привлечь к интерпретации годограф отраженной волны.

Обратимся к уравнениям годографа волны, отраженной от границы, расположенной на глубине $z = z^*$, и поставим задачу определить по нему положение границы $z = z^*$ и распределение скорости сейсмической волны в слое $0z^*$. В работе [5] показано, что функция $v(z)$ не определяется по годографу единственным образом, так как разным скоростным функциям $v(z)$, имеющим одну и ту же меру $H(u)$, где

$$H(u) = \text{mes} \{z: z \leq z^*, v^{-1}(z) \leq u\},$$

соответствует одинаковая кривая $t(x)$, $x \in [0, x^*]$.

Поставим задачу определить функцию $H(u)$ и, следовательно, глубину отражающей границы и минимальное и максимальное значения скорости в слое над отражающей границей. По определению, функция $H(u)$: а) не убывает; б) равна нулю при $-\infty < u \leq u^*(z^* - 0)$; в) равна h при $u(0) = u_0 \leq u < \infty$. Здесь u^* и u_0 — соответственно минимальное и максимальное значения функции $u(z) = v^{-1}(z)$ в слое над отражающей границей.

Запишем первое уравнение в формуле (1) в виде интеграла Стильтьеса

$$x(p) = 2p \int_{u^*}^{u_0} dH(u) / (u^2 - p^2)^{1/2}, \quad (9)$$

где $0 \leq p \leq u^* \leq u \leq u_0$; $dH(u) \geq 0$, т. е. $H(u)$ — монотонная функция.

Уравнение (9) — интегральное уравнение первого рода фредгольмового типа. Задача решения уравнения (9) даже для монотонных функций $H(u)$ некорректна, так как левая часть уравнения в общем может не принадлежать области значения интегрального оператора [17]. В этой связи в качестве решения уравнения (9) будем рассматривать решение в смысле наименьших квадратов, минимизирующее функционал

$$J(H, x) = \int_0^{u^*} \frac{0,5}{p} \left\{ x(p) - 2p \int_{u^*}^{u_0} \frac{dH(u)}{(u^2 - p^2)^{1/2}} \right\}^2 dp \quad (10)$$

и удовлетворяющее условию

$$dH(u) \geq 0. \quad (11)$$

Таким образом, задача определения функции $u(z) = v^{-1}(z)$ по годографу отраженной волны сводится к задаче квадратичного программирования в бесконечномерном пространстве, минимизации квадратичного функционала (10) при линейных ограничениях (11).

Необходимое условие минимума функционала $J(H, x)$ — равенство нулю его первой вариации [19]:

$$\delta J = \frac{d}{d\alpha} J [H(u) + \alpha \delta H, x]_{\alpha=0}.$$

Проделав соответствующие вычисления, получим, что элемент, реализующий минимум функционала $J(H, x)$, является решением уравнения

$$f(w) = \int_0^{u^*} \frac{x(p) dp}{(w^2 - p^2)^{1/2}} = \int_{u^*}^{u_0} dH(u) \int_0^{u^*} \frac{2p dp}{((w^2 - p^2)(u^2 - p^2))^{1/2}} du, \quad (12)$$

где $u^* \leq w \leq u_0$.

Внутренний интеграл в правой части выражения (12) равен

$$K(u, w) = \int_0^{u^*} \frac{2p dp}{((w^2 - p^2)(u^2 - p^2))^{1/2}} = 2 \ln \frac{w + u}{(w^2 - u^{*2})^{1/2} + (u^2 - u^{*2})^{1/2}}.$$

Уравнение (12) можно записать в другом виде. Для этого в левой части уравнения (12) сделаем замену переменных $\xi = \arcsin(p/w)$ и проинтегрируем полученное выражение по частям. В результате получим

$$\begin{aligned} f(w) &= \int_0^{u^*} \frac{x(p) dp}{(w^2 - p^2)^{1/2}} = \int_0^{\arcsin u^*/w} x(w, \xi) d\xi = \\ &= x(u^*) \arcsin \frac{u^*}{w} - \int_0^{x(u^*)} \arcsin \frac{t'(x)}{w} dx. \end{aligned}$$

Окончательно приходим к интегральному уравнению Фредгольма первого рода

$$\begin{aligned} f(w) &= x(u^*) \arcsin \frac{u^*}{w} - \int_0^{x(u^*)} \arcsin \frac{t'(x)}{w} dx = \\ &= 2 \int_{u^*}^{u_0} \ln \frac{w + u}{(w^2 - u^{*2})^{1/2} + (u^2 - u^{*2})^{1/2}} dH(u) \end{aligned}$$

с симметричным, положительным ядром, решение которого ищется на множестве $\mathfrak{B}(u)$ монотонных функций $H(u) \in \mathfrak{B}(u)$.

Функционал (10) и уравнение (14) соответствуют полному годографу отраженной волны. Пределы внешнего интегрирования 0 и u^* в функционале (10) равны значениям производных годографа в начальной ($x=0$) и предельной ($x=x^*$) точках годографа $t=t(x)$. Однако вследствие того что докритические отражения имеют незначительную амплитуду, а в области предельной точки колебания имеют сложную интерференционную картину или вообще колебания выходят за пределы интервала наблюдений, экспериментальные годографы прослеживаются на интервале $[x_{\min}, x_{\max}]$, который уже интервала $[0, x^*]$ ($0 \leq x_{\min}, x_{\max} \leq x^*$). В результате этого пределы внешнего интегрирования в формуле (10) оказываются равными $p_1 = t'(x_{\min})$ и $p_2 = t'(x_{\max})$.

Пределы u^* и u_0 внутреннего интеграла в формуле (10) в общем случае также неизвестны, а известны значения величин $u_{\max} \geq u_0$ и $u_{\min} = p_2 \leq u^*$; u_{\max} соответствует максимальному значению показателя преломления $u(z)$ на верхней границе слоя $0z^*$ и, как правило, всегда может быть задано априори, $u_{\min} = p_2$ равняется значению производной годографа в крайней правой его точке.

В связи с этим обстоятельством встает вопрос, как в такой ситуации найти решение уравнения (12) при условии (11)? Предположим, что искомое распределение есть некоторая функция $H(u)$ параметра u . Как отмечено выше, функция $H(u) = 0$ при $-\infty < u \leq u^*$ и $u \leq u_0 < \infty$, поэтому, если расширить сегмент $[u^*, u_0]$ до сегмента $[u_{\min}, u_{\max}]$, то, очевидно, значение интеграла (9) не изменится и в силу единственности решения задачи полученное распределение $\tilde{H}(u)$ будет отличаться от истинного только в слоях нулевой мощности. Таким образом, значения u_0 и u^* можно задавать произвольным образом в интервалах $[u(0), u_{\max}]$ и $[u_{\min}, u(z^*)]$.

Для неполного годографа функционал (10) и уравнение (12) будут соответственно иметь вид

$$J(H, x) = \int_{p_1}^{p_2} \frac{0,5}{p} \left\{ x(p) - 2p \int_{p_2}^{u_{\max}} \frac{dH(u)}{(u^2 - p^2)^{1/2}} \right\}^2 dp, \quad (10a)$$

$$f(w) = 2 \int_{p_2}^{u_{\max}} \ln \frac{(w^2 - p_1^2)^{1/2} + (u^2 - p_1^2)^{1/2}}{(w^2 - p_2^2)^{1/2} + (u^2 - p_2^2)^{1/2}} dH(u), \quad (12a)$$

где

$$f(w) = x_{\max} \arcsin \frac{p_2}{w} - x_{\min} \arcsin \frac{p_1}{w} - \int_x^{x_{\max}} \arcsin \frac{t'(x)}{w} dx.$$

Рассмотрим функцию $\psi(u) = H'(u) \geq 0$, $u \in [\bar{u}^*, u^*]$, т. е. рассмотрим в слое над отражающей границей положительную функцию $\psi(u)$. При этом

$$\psi(u) = -dz(u)/du \geq 0,$$

что означает, что рассматривается монотонная, возрастающая скоростная функция $v(z)$.

Подставляя функцию $\psi(u)$ в уравнение (10), получим новое уравнение, аналогичное уравнению (10). Решая его так же, как и уравнение (10), найдем функцию $\psi(u)$ и мощность слоя над отражающей границей. Таким образом, в классе монотонных функций скоростная кривая над источником восстанавливается по любому фрагменту годографа. При этом чем длиннее фрагмент, тем устойчивее определение.

Задача обращения годографа отраженной волны рассмотрена в предположении, что слой с неизвестной скоростью начинается на дневной поверхности. По-видимому, точно так же можно рассматривать эту задачу в предположении, что распределение скорости уже известно до глубины $z = z_0$, например по годографу рефрагированной волны. В этом случае вместо функции $x(p)$ следует рассмотреть функцию

$$x_1(p) = x(p) - 2p \int_0^{z_0} \frac{dz}{(u^2(z) - p^2)^{1/2}} = 2p \int_{u^*}^{u_0} \frac{dH(u)}{(u^2 - p^2)^{1/2}}.$$

Остановимся на вопросе численного решения уравнения (12a) при условии (4). Заметим, что в левую часть уравнения (12a), как и в случае годографа рефрагированной волны, входит производная годографа $t'(x)$. Для определения $t'(x)$ аппроксимируем экспериментальный годограф кубическим сплайном, обращенным выпуклостью вниз.

Так как на каждом сегменте $[x_i, x_{i+1}]$ экспериментальный годограф аппроксимируется кубической параболой

$$T(x) = c_0 + c_1(x - x_i) + c_2(x - x_i)^2 + c_3(x - x_i)^3,$$

где коэффициенты c_j ($j = 0, 1, 2, 3$) выражаются через значения сглаживающего сплайна и его вторых производных в узлах сетки

$$\Delta: x_{\min} = x_0 < x_1 < \dots < x_n = x_{\max},$$

то левую часть уравнения (12) можно записать в виде

$$f(w) = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} \arcsin \frac{c_{i1} + 2c_{i2}(x - x_i) + 3c_{i3}(x - x_i)^2}{w} dx - \\ - x_{\max} \arcsin \frac{p_2}{w} + x_{\min} \arcsin \frac{p_1}{w}.$$

Для численного решения уравнения (12а) перейдем к его дискретизации, разбив сегмент $[p_2, u_{\max}]$ на N частичных сегментов $[u_{j-1}, u_j]$. Рассмотрим на сегменте $[p_2, u_{\max}]$ функцию скачков ΔH_j ($j = 1, 2, \dots, N-1$). В этом случае будем иметь систему N линейных уравнений относительно N неизвестных ΔH_j :

$$f(w_i) = \sum_{j=1}^N d_{ij} \Delta H_j, \quad i = 1, 2, \dots, N, \quad (13)$$

где

$$d_{ij} = 2 \ln \frac{(w_i^2 - p_2^2)^{1/2} + (u_j^2 - p_2^2)^{1/2}}{(w_i^2 - p_1^2)^{1/2} + (u_j^2 - p_1^2)^{1/2}} \quad (14)$$

— положительно определенная матрица $\Delta H_j \geq 0$.

Очевидно, что решение системы (13), которая может быть записана в виде $A^T \Delta H = A^T x$, минимизирует функционал $S = \|\Delta H - x\|^2$.

Таким образом, задача сводится к задаче квадратичного программирования в конечномерном пространстве, которая всегда имеет единственное решение (при условии невырожденности матрицы $D = A^T A$ системы (13)), так как выпуклый по ΔH функционал S ограничен снизу и непрерывен на выпуклом множестве $\mathfrak{B} = \{\Delta H_j \mid \Delta H_j \geq 0\}$ [9].

Решая задачу (13), (14) одним из известных методов, например методом сопряженных градиентов [8], найдем значения неизвестных величин ΔH_j . Функцию $H(u)$ на сегменте $[p_2, u_{\max}]$ определим из соотношений

$$H(u) = H_j + \Delta H_j, \quad u \in [u_j, u_{j+1}], \quad \Delta H_j \geq 0, \quad j = 1, 2, \dots,$$

$$N - 1, \quad H_1 = H(u^*) = 0.$$

Крайние значения p_2 и u_{\max} можно уточнить в процессе решения задачи путем некоторой итерационной процедуры. Решим задачу для некоторых значений $u^{*0} = p_2$ и $u_0^0 = u_{\max}$. Затем в качестве u^* и u_0 возьмем те крайние значения u_i и u_j , для которых ΔH_i и ΔH_j равны нулю. Затем снова решим задачу, но уже для крайних значений u^{*1} и u_0^1 . И так далее до тех пор, пока крайние значения ΔH_1 и ΔH_{N-1} не будут отличны от нуля.

Если на некотором шаге итерационной процедуры значения u^* и u_0 окажутся близкими, то матрица системы (13) будет близка к вырожденной. В этом случае слой $z_0 z^*$ следует рассматривать как слой с постоянной скоростью, параметры которого определяются из уравнений

$$x(p) = 2p \frac{\Delta z}{(u^2 - p^2)^{1/2}}, \quad t(p) = 2 \frac{u^2 \Delta z}{(u^2 - p^2)^{1/2}}$$

по формулам

$$u = \frac{1}{p_2 - p_1} \int_{p_1}^{p_2} (u(p) p)^{1/2} dp, \quad \Delta z = \frac{1}{2(p_2 - p_1)} \int_{p_1}^{p_2} x(p) (u(p)/p - 1)^{1/2} dp,$$

где $u(p) = t(p)/x(p)$.

Рассмотрим пример численной реализации приведенного выше алгоритма. Для численного моделирования взята скоростная модель упругой среды, состоящая из шести слоев с линейным изменением скорости в каждом слое. В первом слое, расположенном в интервале глубин 0—1 км, градиент скорости равен 1 с^{-1} . Во втором слое градиент вдвое меньше ($0,5 \text{ с}^{-1}$). Третий слой начинается на глубине 3 км и имеет существенно меньший градиент скорости ($0,07 \text{ с}^{-1}$). На глубинах 6 и 9 км скоростная кривая имеет скачки скорости. Градиент скорости в слое, заключенном в этом интервале глубин, равен $0,07 \text{ с}^{-1}$. В интервале глубин 9—12 км имеет место волновод с постоянной скоростью, на нижней границе которого кривая имеет третий скачок.

На рис. 1, а' и а приведены соответственно скоростная кривая для указанной модели и неполные годографы рефрагированных и отраженных волн в редукции 6 км/с. Во времена годографов внесены случайные ошибки со среднеквадратичным отклонением 0,01 с и проведена совместная интерпретация годографов рефрагированных и отраженных волн. В результате интерпретации получена кривая, которая почти полностью совпала с заданной.

На рис. 1, б приведен результат интерпретации годографов только отраженных волн. Видно, что в целом полученная кривая хорошо совпала с исходной. Наиболее устойчиво определены положения границ и скорости над отражающими границами, менее устойчиво — скорости на верхних границах соответствующих слоев и скорость в области с резким изменением градиента.

На рис. 1, в' и в представлены соответственно небольшие фрагменты исходных годографов и скоростная кривая, полученная в результате обращения этих фрагментов. Нетрудно видеть, что положение границ определено почти без ошибок, но скоростная кривая имеет более гладкий характер, чем исходная.

Сравнивая результаты всех трех определений, можно сделать следующие выводы. Наилучшие результаты получаются при совместной интерпретации годографов рефрагированных и отраженных волн. В этом случае по годографам рефрагированных волн хорошо определяются участки с повышенным градиентом скорости и хуже — участки с малыми градиентами из-за незначительного проникновения рефрагированных волн в глубь слоев. По годографам отраженных волн хорошо определяются положение границ и значения скоростей сейсмических волн над границами.

Оценим погрешность в определении глубины источника. Пусть истинное значение этой глубины равно z^* . Предположим, что в результате определений получено значение глубины источника, равное z^* , и скорость в слое $z^* \tilde{z}^*$ постоянна. Тогда, для $\delta t = \tilde{t} - t$ и $\delta x = \tilde{x} - x$ при условии $u(z) = u = \text{const}$, $z \in [z^*, \tilde{z}^*]$ будем иметь

$$\delta t = \frac{u^2}{(u^2 - p^2)^{1/2}} \delta z, \quad \delta x = \frac{p}{(u^2 - p^2)^{1/2}} \delta z.$$

Принимая в качестве отклонения теоретического годографа $t = t(u)$ от экспериментального $\tilde{t} = \tilde{t}(x)$ величину

$$\delta \tau(p) = ([\delta t(p)]^2 + [p \delta x(p)]^2)^{1/2},$$

будем иметь

$$\delta z(p) = \left(\frac{u^2 - p^2}{u^4 + p^4} \right)^{1/2} \delta \tau(p). \quad (15)$$

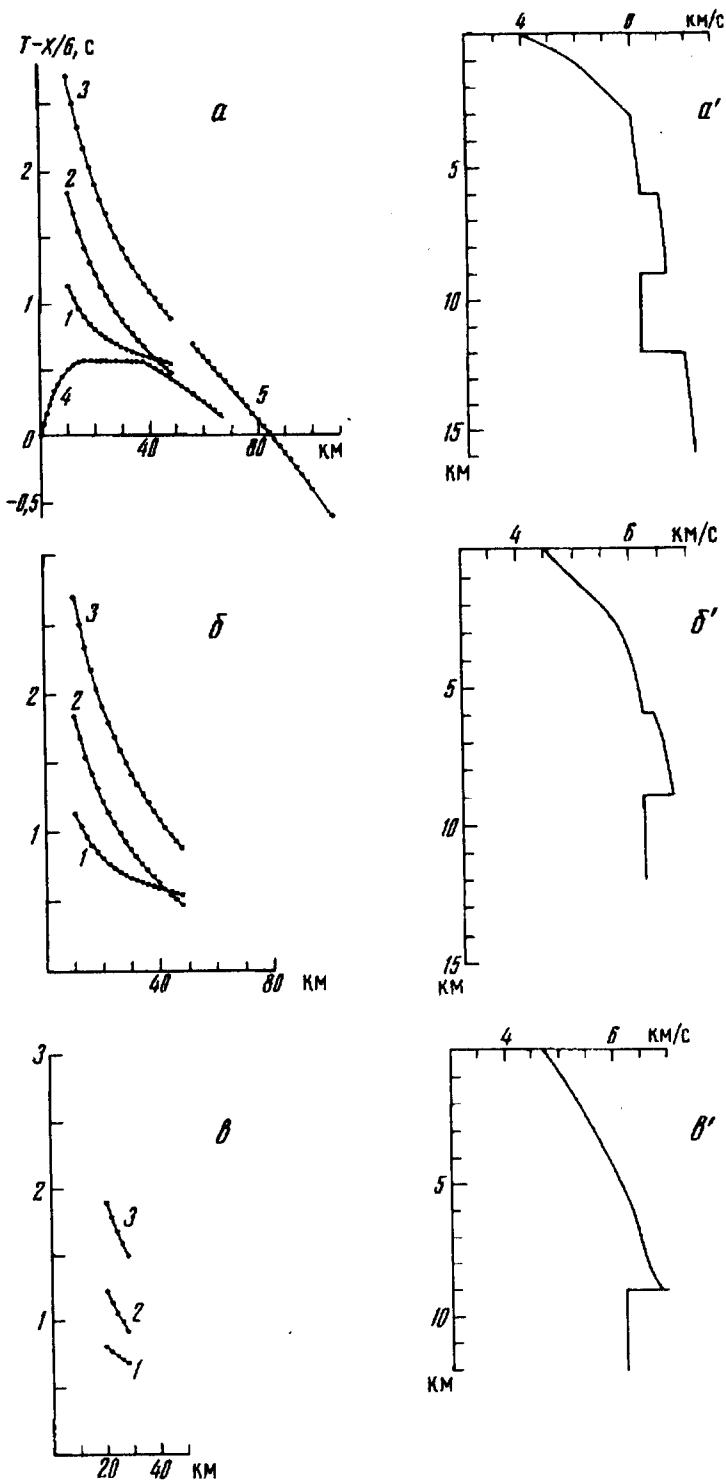


Рис. 1. Годографы сейсмических волн (α — γ) и соответствующие им восстановленные скоростные кривые (α' — γ'); 1—3 — фрагменты годографов отраженных волн; 4, 5 — фрагменты годографов рефрагированных волн. Пояснения см. в тексте

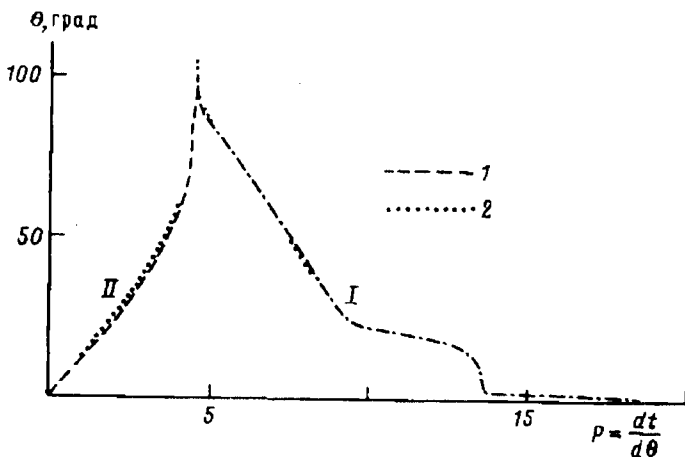


Рис. 2. Кривые распределения $\theta(p)$ для годографов P — (I) и PcP -волн (II): 1 — для годографов продольных волн [8, 9]; 2 — для годографов продольных волн [13, 23, 27]

Формула (15) связывает величину ошибки в определении z^* с величиной погрешности $\delta\tau$, погрешности в изменении эпицентрального расстояния и времени пробега сейсмической волны, распространяющейся вдоль луча с параметром p . Если решение задачи ищут по участку годографа, ограниченному лучами с параметрами p_1 и p_2 , то ошибку в определении z^* можно найти как среднюю величину для всех значений $p \in [p_1, p_2]$ из соотношения

$$\begin{aligned}
 |\Delta z| &\leq \frac{1}{p_2 - p_1} \int_{p_1}^{p_2} |\delta z(p)| dp = \frac{1}{p_2 - p_1} \times \\
 &\times \int_{p_1}^{p_2} \left(\frac{u^2 - p^2}{u^4 + p^4} \right)^{1/2} \delta\tau(p) dp \leq \frac{|\Delta\tau|}{u^2 (p_2 - p_1)} \int_{p_1}^{p_2} (u^2 - p^2)^{1/2} dp = \\
 &= \frac{1}{2u^2 (p_2 - p_1)} \left\{ p (u^2 - p^2)^{1/2} + u^2 \arcsin \frac{p}{u} \right\} \Big|_{p_1}^{p_2} |\Delta\tau|,
 \end{aligned} \tag{16}$$

где $|\Delta\tau| \in [|\delta\tau|_{\min}, |\delta\tau|_{\max}]$.

В частности, для полного годографа, когда $p_1 = 0$ и $p_2 = u$, имеем

$$|\Delta z| \leq \frac{\pi |\Delta\tau|}{4u}.$$

Численные эксперименты показывают хорошее согласие полученных оценок с реальными ошибками в определении положения отражающих границ.

Результаты определения скоростной кривой в мантии и радиуса ядра Земли. Для определения скоростной кривой в мантии и радиуса ядра Земли использованы несглаженные годографы P -волн, полученные Е. Харрином и др. [13], и PcP -волн, полученные Дж. Таггартом и Э. Энгдалом [27], а также сглаженные годографы, построенные С. Д. Коган [8, 9].

Для анализа исходных данных построены зависимости эпицентральных расстояний θ от лучевого параметра p . На рис. 2 представлены эти зависимости. Годограф рефрагированной волны Е. Харрина и др. приведен в работе [27] для эпицентральных расстояний от 20 до 105°. Для эпицентральных расстояний от 0 до 20° — взят из работы [23] (на рис. 2 зависимости $\theta(p)$ для этих годографов показаны точками). Среднеквадратическая погрешность сглаживания этого го-

Распределение скорости распространения *P*-волн в мантии Земли

| <i>H</i> , км | <i>v_p</i> | <i>H</i> , км | <i>v_p</i> | <i>H</i> , км | <i>v_p</i> |
|---------------|----------------------|---------------|----------------------|---------------|----------------------|
| 0,00 | 6,00 | 550 | 9,91 | 1800 | 12,55 |
| 14,90 | 6,00 | 600 | 10,17 | 1900 | 12,65 |
| 14,90 | 6,75 | 650 | 10,43 | 2000 | 12,78 |
| 22,49 | 6,84 | 700 | 10,74 | 2100 | 12,89 |
| 42,96 | 7,21 | 750 | 11,00 | 2200 | 13,01 |
| 42,96 | 8,05 | 800 | 11,07 | 2300 | 13,14 |
| 100,00 | 8,11 | 850 | 11,17 | 2400 | 13,24 |
| 150,00 | 8,20 | 900 | 11,26 | 2500 | 13,35 |
| 200,00 | 8,32 | 1000 | 11,45 | 2600 | 13,48 |
| 220,00 | 8,38 | 1100 | 11,60 | 2700 | 13,61 |
| 250,00 | 8,48 | 1200 | 11,77 | 2750 | 13,62 |
| 300,00 | 8,66 | 1300 | 11,90 | 2780 | 13,68 |
| 350,00 | 8,90 | 1400 | 12,05 | 2800 | 13,64 |
| 400,00 | 9,13 | 1500 | 19,19 | 2830 | 13,60 |
| 450,00 | 9,36 | 1600 | 21,31 | 2860 | 13,56 |
| 500,00 | 9,66 | 1700 | 12,43 | 2893 | 13,54 |

дографа составила 0,04 с. Годограф продольной волны, отраженной от ядра, полученный Дж. Таггартом и Э. Энгдалом, приведен в работе [27] для эпицентральных расстояний от 20 до 63°. Разброс точек экспериментального годографа относительно сглаживающего сплайна составил 0,4 с.

Кривые $\theta(p)$, построенные по сглаженным годографам С. Д. Коган, показывают (на рис. 2 пунктирные линии), что годографы *PcP*- и *P*-волн, начиная с эпицентрального расстояния 95°, не согласованы по кажущимся скоростям, а годограф *P*-волны задан только от 30°. По этой причине для расчетов взяты: годограф *P*-волны до расстояний 30° из работы [23], а для расстояний от 30 до 90° — из работы [8]; годограф *PcP*-волны в диапазоне от 16 до 70° — из работы [9]. Среднеквадратические погрешности наблюдаемых годографов относительно сглаженных, согласно работе [9], составляют 0,7 с. Годограф *PcP*-волны взят до эпицентрального расстояния 70° потому, что «хвостовая» часть годографа, соответствующая закритическим отражениям, вносила большие ошибки в определении положения границы ядра, чем начальная часть, соответствующая докритическим отражениям.

В результате расчетов получено, что глубина границы ядра Земли, определенная по годографам из данных работ [13, 27], равна 2893 ± 2 км, что соответствует величине радиуса ядра, равной 3478 ± 2 км, а по годографам из работ [8, 9] — 2894 ± 1 км, что соответствует величине радиуса ядра 3477 ± 1 км (в последнем случае погрешность определена относительно сглаженного годографа). Скорости сейсмических волн над границей ядра равны 13,54 и 13,63 км/с соответственно. Из сравнения приведенных результатов с результатами других авторов следует, что значения величины радиуса ядра, приведенные в работах [14, 27], ближе всех других к значениям, полученным в настоящей работе. Окончательный результат определения скоростной кривой в мантии приведен в таблице.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бурмин В. Ю. Аппроксимация сейсмического годографа выпуклыми сплайнами // Изв. АН СССР. Физика Земли. 1980. № 2. С. 90—96.
2. Бурмин В. Ю. Формулы обращения для разрывных годографов рефрагированных волн // Изв. АН СССР. Физика Земли. 1980. № 6. С. 94—100.
3. Бурмин В. Ю. Численное решение обратной одномерной кинематической задачи сейсмоки по годографу рефрагированных волн // Изв. АН СССР. Физика Земли. 1981. № 12. С. 28—35.

4. Бурмин В. Ю. Определение скоростной функции численными методами//Современное состояние сейсмологических исследований в Европе. М.: Наука, 1988. С. 439—443.
5. Гервер М. Л., Маркушевич В. М. Определение по годографу скорости распространения сейсмических волн//Вычислительная сейсмология. Вып. 3. М.: Наука, 1967. С. 3—51.
6. Зойтендейк Г. Метод возможных направлений. М.: Изд-во иностр. лит., 1963. 325 с.
7. Карманов В. Г. Математическое программирование. М.: Наука, 1975. 272 с.
8. Коган С. Д. О временах пробега продольных сейсмических волн в условиях горизонтально-неоднородной верхней мантии//Изв. АН СССР. Физика Земли. 1980. № 6. С. 3—13.
9. Коган С. Д. Времена пробега продольной волны, отраженной от ядра, и особенности переходной зоны от мантии к ядру//Изв. АН СССР. Физика Земли. 1980. № 12. С. 3—14.
10. Чибисов С. В. Обработка криволинейного годографа упругих волн при плоскопараллельном распределении их скоростей в упругой среде//Журн. геофизики. 1934. Т. 4. Вып. 2. С. 211—225.
11. Яновская Т. Б. Преобразование годографа рефрагированной волны в годограф отраженной волны//Вычислительная сейсмология. Вып. 5. М.: Наука, 1971. С. 199—205.
12. Яновская Т. Б. Определение глубины границы ядра по временам пробега волн PcP и годографу P -волн//Теорет. и вычислительная геофизика. 1974. № 2. С. 76—90.
13. Arnold E. P. Smoothing travel-time table//Bull. Seis. Soc. Amer. 1968. V. 58. № 4. P. 1345—1351.
14. Bolt B. A. PdP and PKiKP and diffracted PiP -waves//Geophys. J. Roy. Astron. Soc. 1970. V. 20. P. 367—382.
15. Bolt B. A. The density distribution near the base of the mantle and near the Earth's center//Phys. Earth Planet. Int. 1972. V. 5. № 4. P. 301—311.
16. Dziewonski A. M., Anderson D. L. Preliminary reference Earth model//Phys. Earth Planet. Int. 1981. V. 25. № 4. P. 297—356.
17. Dziewonski A. M., Haddon R. A. W. The radius of the core-mantle boundary inferred from travel-time and from oscillation data. A. critical review//Phys. Earth Planet. Int. 1974. V. 9. № 1. P. 28—35.
18. Engdahl E. R., Jonsson L. E. Differential PcP travel-time and the radius of the core//Geophys. J. Roy. Astron. Soc. 1974. V. 39. № 33. P. 201—209.
19. Engdahl E. R., Toggart J., Lobdell J. L. et al. Computational methods//Bull. Seism. Soc. Amer. 1968. V. 58. № 4. P. 1339—1344.
20. Gilbert F., Dziewonski A. M., Brune J. An informative solution to a seismological inverse problem//Proc. Ac. Sci. 1973. V. 70. P. 1410—1413.
21. Gutenberg B., Richter C. On seismic waves//Beitrag zur Geophysik. 1939. V. 54. P. 94—136.
22. Hales A. L., Roberts J. L. Shear velocities in the lower mantle and radius of the core//Bull. Seism. Soc. Amer. 1970. V. 60. P. 1427—1436.
23. Herrin E., Tucker W., Taggart J. et al. Estimation of surface focus P -travel-time//Bull. Seism. Soc. Amer. 1968. V. 58. № 4. P. 1273—1291.
24. Jeffreys H. The times of PcP and ScS //Mon. Not. Roy. Astron. Soc. Geophys. Suppl. 1949. V. 4. P. 537—547.
25. Jeffreys H., Bullen K. E. Seismological tables. L., 1967. 50 p.
26. Jordan T. H. Estimation of the radial variation of seismic velocities and densities in the Earth. Thesis. Inst. Technol. Pasadena, Calif., 1973. P. 21—25.
27. Taggart J., Engdal E. R. Estimation of PcP travel-time and depth to the core//Bull. Seism. Soc. Amer. 1968. V. 58. № 4. P. 1293—1303.

Институт физики Земли РАН,
Москва

Поступила в редакцию
20.06.1993