ВУЛКАНОЛОГИЯ И СЕЙСМОЛОГИЯ

1994 № 1

УДК 550.344

 БУРМИН В. Ю.

НОВЫЙ ПОДХОД К ОПРЕДЕЛЕНИЮ ПАРАМЕТРОВ ГИПОЦЕНТРОВ ДАЛЕКИХ ЗЕМЛЕТРЯСЕНИЙ

В сейсмологической практике при определении параметров гипоцентров землетрясений минимизируется функционал невязок теоретических и наблюденных времен пробега сейсмических волн. Такой подход по сути эквивалентен минимизации функционала невязок соответствующих гипоцентральных расстояний, которые в свою очередь можно представить в виде радиусов векторов с началом в точке регистрации. Разница длин радиусов векторов не зависит от их направления, вследствие чего определение параметров гипоцентров путем минимизации функционала невязки длин этих векторов может быть неустойчиво. Предлагается при определении координат гипоцентров землетрясений минимизировать не разницы длин радиусов векторов соответствующих теоретическим и наблюденным временам пробега сейсмических волн от очага до регистрирующих их станций, а длины векторов разности этих векторов. Такой подход позволяет повысить устойчивость определения параметров гипоцентров. Решение задачи проведено с учетом эллиптичности Земли в предположении, что скорость является произвольной функцией расстояния от центра Земли.

NEW APPROACH TO DETERMINATION OF HYPOCENTER'S PARAMETERS FOR FAR EARTHQUAKES, by Bourmin V. Ju. Residul's functional of theoretical and experimental times of propagation of seismic waves is usual minimized in seismological practice. This approach is equal to minimization of receadual's functional of appropriate hypocenter distanses that may be presented by radius-vectors with origin of coordinats in point of receiver. The difference of the length of two vectors doesn't depended on its directions. Therefore determination of hypocenter's parameters by minimization of residual's function of length these vectors may be not stable. The author offers to minimize the length of the vectors equal to difference of vectors corresponding theoretical and experimental times propogation of seismic waves from source to reciver, but not the difference of the length these vectors. The problem is solved for elliptical Earth when seismic velocity is function of distance from of the Earth's center.

(Recieved February 6, 1992)

Institute of the Physics of the Earth, Russian Academy of Sciences, Moscow, 123810, Russia

Уравнения, связывающие координаты гипоцентров землетрясений и координаты сейсмических станций на эллипсоиде. В сейсмологической практике определение координат гипоцентров землетрясений, зарегистрированных мировой сетью сейсмических станций, основано на минимизации функционала невязок:

$$S_t = \sum_{i=1}^{n} (t_i - \tilde{t}_i)^2, \tag{1}$$

где t_i и $\tilde{t}_i$ — теоретические и наблюденные времена пробега сейсмических волн от очага до регистрирующих станций; t_i — функция эпицентрального расстояния, глубины очага и строения Земли на пути пробега сейсмических волн.

Если задаться некоторым уровнем погрешности δt в определении времен пробега сейсмических волн, то все значения координат гипоцентра, для которых $S_t^{1/2} \le \delta t$, будут принадлежать некоторой области ω, которая в общем случае

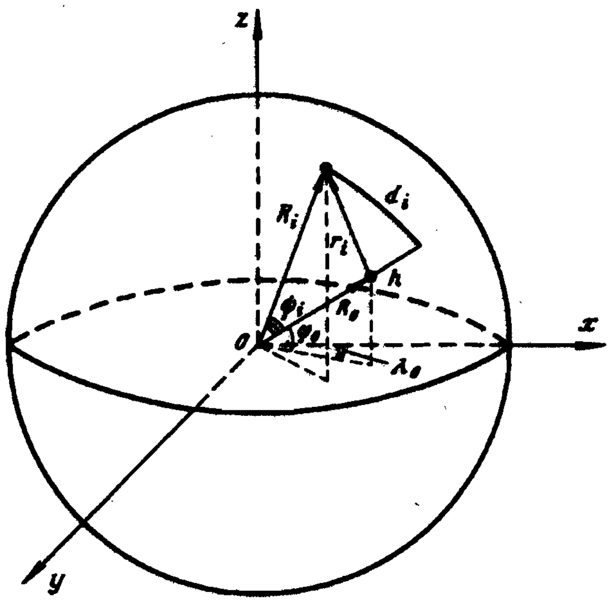

Рис. 1. Переход от географических к геоцентрическим координатам

может быть многосвязной. Запишем уравнения, связывающие координаты точек из ω, т. е. координаты возможных гипоцентров и координаты сейсмических станций. Пусть для n сейсмических станций, расположенных на поверхности земли, заданы географические координаты φ_i, λ_i и превышения над уровнем моря Δh_i, а гипоцентр землетрясения имеет координаты φ_0, λ_0 и глубину H_0. Поместим в центр Земли начало декартовой системы координат. Ось $0Z$ расположим по полярной оси земного эллипсоида, ось $0X$ — на пересечении плоскости экватора и плоскости начала счета долгот, ось $0Y$ — в плоскости экватора, но в меридиане, плоскость которого составляет с плоскостью начального меридиана угол 90°. Тогда можно записать систему нелинейных уравнений, связывающую координаты гипоцентра и регистрирующих станций в декартовой системе координат:

$$(X_0 - x_i)^2 + (Y_0 - y_i)^2 + (Z_0 - z_i)^2 = r_i^2. \qquad (2)$$

Здесь X_0, Y_0, Z_0 — координаты гипоцентра; x_i, y_i, z_i — координаты сейсмических станций; $\mathbf{r}_i = \mathbf{R}_i - \mathbf{R}_0$;

$$|\mathbf{R}_i| = R_i = (x_i^2 + y_i^2 + z_i^2)^{1/2}, \quad |\mathbf{R}_0| = R_0 = (X_0^2 + Y_0^2 + Z_0^2)^{1/2}$$

$$(i = 1, 2, \ldots, n).$$

Связь между географическими и декартовыми координатами на поверхности эллипсоида записывается с помощью формул [4]

$$x = \frac{a \cos\varphi \cos\lambda}{(1 - e^2 \sin\varphi)^{1/2}}, \quad y = \frac{a \cos\varphi \sin\lambda}{(1 - e^2 \sin\varphi)^{1/2}}, \quad z = \frac{a(1 - e^2) \sin\varphi}{(1 - e^2 \sin\varphi)^{1/2}}, \qquad (3)$$

где a — большая полуось эллипсоида; $e^2 = (a^2 - b^2)/a^2$ — первый эксцентриситет меридианного эллипса; b — малая полуось эллипсоида.

Решение системы уравнений (2) будем искать на поверхности шара радиуса R_0. При этом будут справедливы соотношения

$$X_0 = R_0 \cos\varphi \cos\lambda, \quad Y_0 = R_0 \cos\varphi \sin\lambda, \quad Z_0 = R_0 \sin\varphi. \qquad (3а)$$

Раскроем скобки в формуле (2) и воспользуемся соотношениями для R_i и R_0 (рис. 1). Тогда

$$X_0x_i + Y_0y_i + Z_0z_i = 0{,}5\,(R_0^2 + R_i^2 - r_i^2). \tag{4}$$

В правую часть уравнения (4) входят величины r_i^2:

$$r_i^2 = R_0^2 + R_i^2 - 2R_0R_i\cos\psi_i,$$

где $\psi_i = d_i/R_i$ — угол между векторами $\mathbf{R}_0$ и $\mathbf{R}_i$, d_i — эпицентральные расстояния.

Обозначим $r_0 = R_0$. Подставляя ψ_i в выражения для r_i^2, а r_i^2 в уравнения (4) и деля правую и левую его части на r_0R_i, получим

$$Uu_i + Vv_i + Ww_i = \cos(d_i/R_i) = \cos(\psi_i), \tag{5}$$

где $U = X_0/r_0$; $V = Y_0/r_0$; $W = Z_0/r_0$; $w_i = x_i/R_i$; $v_i = y_i/R_i$; $w_i = z_i/R_i$; $r_0 = R_3 - h$; h — глубина гипоцентра, отсчитываемая от поверхности земли; $R_3 = (X^2 + Y^2 + Z^2)^{1/2}$ — величина радиуса Земли в соответствующей точке земной поверхности; X, Y, Z определяются из соотношений (3). При этом координаты гипоцентра не должны выходить за пределы земного эллипсоида, т. е. сумма квадратов неизвестных U, V, W должна удовлетворять неравенству

$$U^2 + V^2 + W^2 \le [1 + e^2\sin^2\varphi - 2e^2(\sin\varphi)/a]/(1 - e^2\sin\varphi). \tag{6}$$

Система уравнений (5) представляет собой систему линейных алгебраических уравнений относительно трех неизвестных величин U, V и W. В правую часть уравнений (5) входят величины $d_i = R_i\psi_i$ — эпицентральные расстояния на поверхности сферы радиуса R_i, которые зависят от h и которые необходимо предварительно вычислить. Решая уравнения (5), получим

$$X_0 = U/r_0;\quad Y_0 = V/r_0;\quad Z_0 = W/r_0;$$

$$R_0 = (X_0^2 + Y_0^2 + Z_0^2)^{1/2};\quad H = R_3 - R_0.$$

Очевидно, что каждая точка области ω определяет набор величин h и d_i. В свою очередь каждому набору h, d_i отвечает некоторое решение $\{U, V, W\}$ системы (5), совокупность которых порождает множество Ω, элементами которого являются переменные H и $D_i = R_i\Psi_i$ $(i = \overline{1, n})$, где Ψ_i — угловое расстояние между эпицентром землетрясения и i-й сейсмической станцией.

В качестве решения задачи целесообразно взять те значения d_i и, следовательно h, которые, с одной стороны, минимизируют расстояние между множествами ω и Ω в заданной метрике, а с другой — удовлетворяют условию $S_t^{1/2} \le \delta t$.

Определим расстояние между двумя точками M_1 и M_2 внутри шара как

$$\rho = (R_{ш}^2(\psi_1 - \psi_2)^2 + (r_1 - r_2)^2)^{1/2},$$

где $R_{ш}$ — радиус шара; r_1 и r_2 — расстояния вдоль радиуса от центра шара до точек M_1 и M_2; $\psi_1 - \psi_2$ — кратчайшее угловое расстояние между точками M_1 и M_2. Тогда сумма квадратов расстояний между точками множеств ω и Ω запишется в виде

$$S = \sum_{i=1}^{n}[(D_i - d_i)^2 + (H - h)^2] = \sum_{i=1}^{n}[R_i^2(\Psi_i - \psi_i)^2 + (R_0 - r_0)^2]. \tag{7}$$

Таким образом, задача определения координат гипоцентров землетрясений сводится к определению области ω и соответствующей ей области Ω и минимизации функционала (7).

Наиболее просто эта задача решается для сферически симметричного распределения скорости распространения сейсмических волн в Земле. В этом случае скорость зависит только от расстояния от центра Земли до текущей точки и величины ψ_i определяются по явным формулам

$$\psi_i = \alpha_i \left[\int\limits_{R_0}^{R_0+h} + k \int\limits_{R_\alpha}^{R_0} \{ [r/v(r)]^2 - \alpha_i^2 \}^{-1/2} \right] \frac{dr}{r}, \tag{8а}$$

где α_i — лучевые параметры; $k = 0$ для лучей, выходящих вверх из источника; $k = 2$ для лучей, выходящих вниз из источника; R_α — расстояние от центра Земли до точки максимального проникновения луча; h — глубина гипоцентра, отсчитываемая от поверхности Земли. Очевидно, что $h = R_3 - R_0$, где R_3 — радиус Земли в эпицентре землетрясения.

Чтобы вычислить ψ_i по формуле (8), необходимо знать величины α_i и h. Запишем формулу для определения времени пробега сейсмической волны:

$$t_i = \left[\int\limits_{R_0}^{R_0+h} + k \int\limits_{R_\alpha}^{R_0} \right] \frac{[r/v(r)]^2}{([r/v(r)]^2 - \alpha_i^2)^{1/2}} \frac{dr}{r}. \tag{8б}$$

В том случае, когда лучевые параметры α_i определяются по формуле Бендорфа $\alpha_i = v^{-1}(R_3) \sin \beta$, где β_i — углы выхода сейсмических лучей на дневную поверхность под i-й сейсмической станцией, глубина h легко определяется из соотношений (8б) из условия близости наблюденных времен $\tilde{t}_i$ и времен, вычисленных по формулам (8б).

Как правило, углы β_i выхода сейсмических лучей определяются с большими ошибками, поэтому считаются неизвестными. В этом случае лучевые параметры α_i определяются из соотношений (8б), а величины ψ_i будут зависеть от глубины h источника, т. е. будут определяться неоднозначно. Таким образом, каждому r_i в уравнениях (2) и, следовательно, каждому $\tilde{t}_i$ будет соответствовать некоторое множество ω переменных h, d_i. При этом каждому набору h, d_i $(i = \overline{1, n})$ будет отвечать свое решение $\{X, Y, Z\}$ системы (4): совокупность их порождает множество Ω, элементами которого являются переменные X_0, Y_0, Z_0.

Если время в очаге известно, то перебирая значения h, заданные на сетке Δ_h, из условия близости наблюденных времен пробега $\tilde{t}_i$ и теоретических t_i, рассчитанных по формулам (8б), для каждого h определим значения лучевых параметров α_i и соответственно Ψ_i. Окончательно выбираем те значения h и ψ_i, которые минимизируют функционал (7).

Как упоминалось выше, в сейсмологической практике при определении координат гипоцентра в качестве последнего принимается точка из некоторой области ω, которая реализует минимум функционала невязки времен (1).

Пусть ρ_i, d_i и h соответствуют теоретическим временам t_i пробега сейсмических волн от очага до i-й станции, где $\rho_i = v_i t_i$ — гипоцентральные расстояния; d_i — эпицентральные расстояния; h — глубина очага землетрясения; $P_i = u_i \hat{t}_i$, D_i и H — те же величины, но соответствующие истинному положению гипоцентра $(u_i = v_i - \delta v_i)$. Тогда для функционала S_i можно записать

$$S_i = \sum_{i=1}^{n} (t_i - \hat{t}_i - \delta t_i)^2 = \sum_{i=1}^{n} v_i^{-2} (v_i t_i - v_i \hat{t}_i - v_i \delta t_i)^2 = \sum_{i=1}^{n} v_i^{-2} (v_i t_i -$$

$$- u_i \hat{t}_i - \hat{t}_i \delta t_i - v_i \delta t_i)^2 = \sum_{i=1}^{n} v_i^{-2} (P_i - \delta P_i - \rho_i)^2.$$

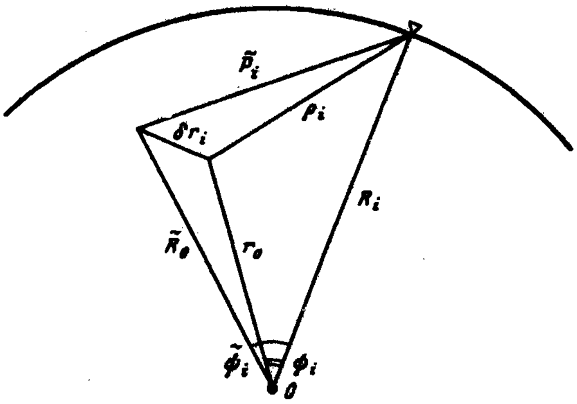

Рис. 2. Пояснение к неравенству (9)

Здесь $\widehat{t}_i = \widetilde{t}_i - \delta t_i$; $\delta P = \widehat{t}_i \delta v_i + v_i \delta t_i$. Далее (рис. 2)

$$S_t = \sum_{i=1}^{n} v_i^{-2} (P_i - \delta P_i - \rho_i)^2 = \sum_{i=1}^{n} v_i^{-2} (\widetilde{P}_i - \rho_i)^2 \leq \sum_{i=1}^{n} v_i^{-2} \delta r_i^2 \leq$$

$$\leq \sum_{i=1}^{n} v_i^{-2} \{R_i^2 (\Psi_i - \psi_i)^2 + (\widetilde{R}_0 - r_0)^2\} = \sum_{i=1}^{n} \nu_i (\widetilde{D}_i - d_i)^2 + \Upsilon (\widetilde{H} - h)^2 = S, \qquad (9)$$

где $\delta \mathbf{r} = \mathbf{R}_0 - \mathbf{r}_0 = \mathbf{P}_i - \boldsymbol{\rho}_i$; d_i, h и $\widetilde{D}_i$, $\widetilde{H}$ — эпицентральные расстояния и глубины, соответствующие теоретическим и наблюденным временам пробега сейсмических волн; $\nu_i = v_i^{-2}$ и $Y = \sum_{i=1}^{n} \nu_i$ — весовые множители, характеризующие неоднородность среды. Из полученного соотношения следует, что малость значения функционала S_t не гарантирует малость значений функционалов невязок в определении глубины гипоцентра землетрясения и эпицентральных расстояний, но малость значения функционала S влечет за собой малость значения функционала невязки времен. Это утверждение является следствием того факта, что квадрат разности $(\widetilde{P}_i - \rho_i)^2$ суть квадрат разностей модулей векторов $\mathbf{P}_i$ и $\boldsymbol{\rho}_i$ и не зависит от их направлений, в то время как сумма квадратов разностей $(\widetilde{D}_i - d_i)^2 + (\widetilde{H} - h)^2$ есть квадрат модуля разности $\mathbf{P}_i$—$\boldsymbol{\rho}_i$ соответствующих векторов.

Запишем функционал S в виде

$$S = \sum_{i=1}^{n} \omega_i (\widetilde{D}_i - d_i)^2 + (\widetilde{H} - h)^2 = \sum_{i=1}^{n} \omega_i R_i^2 (\Psi_i - \psi_i)^2 + (\widetilde{R}_0 - r_0)^2, \qquad (9a)$$

где $\omega_i = \nu_i / \Upsilon$, и сформулируем задачу 1.

Пусть $\mathcal{H}$ — множество глубин, на которых могут располагаться очаги землетрясений и h — элемент этого множества ($h \in \mathcal{H}$). Требуется найти такое $h^* \in \mathcal{H}$, которое обеспечило бы минимум функционалу (9а) при условии, что X, Y и Z определяются из решения системы линейных алгебраических уравнений (5).

Таким образом, рассмотрена задача определения координат гипоцентров φ, λ и H. Однако на практике при локализации далеких землетрясений наибольший интерес представляет задача определения четырех параметров гипоцентра: φ и ? H и τ_0. В этом случае возможны различные подходы.

В том случае, когда углы выхода сейсмических лучей на поверхность определяются из наблюдений, время в очаге τ_0, равное разности времен прихода и времен пробега сейсмических волн от очага до точек наблюдения, и глубина гипоцентра определяются из уравнений (8б).

Если известны только времена прихода сейсмических волн и координаты точек наблюдений, то задачу решаем следующим образом. Запишем величины r_i^2 в виде

$$r_i^2 = v_i^2(\tau_i - \tau_0)^2 = v_i^2\tau_i^2 - 2v_i^2\tau_i\tau_0 + v_i^2\tau_0^2,$$

где τ_i — времена прихода сейсмических волн на станции; τ_0 — время в очаге; u_i — эффективные скорости распространения сейсмических волн, численно равные отношению гипоцентрального расстояния ко времени их пробега по лучу.

Подставим полученное выражение для r_i^2 в правую часть уравнения (4) и сгруппируем члены. В результате будем иметь

$$X_0x_i + Y_0y_i + Z_0z_i - T_0\tau_iv_i^2 = 0{,}5\,[r_0^2 + R_i^2 - v_i^2(\tau_i^2 + \tau_0^2)]$$

или, проводя соответствующие преобразования, окончательно получим

$$Uu_i + Vv_i + Ww_i - Qq_i = \cos(d_i/R_i) - \tau_0\tau_iv_i^2/(r_0R_i), \tag{10}$$

где U, V, W, u_i, v_i, w_i — те же, что в уравнениях (5); $Q = T_0/r_0$, $q_i = \tau_iv_i^2/R_i$. При этом, как и раньше, должно выполняться соотношение (6).

Кроме этого, запишем функционал

$$S = \sum_{i=1}^{n} \omega_i(D_i - d_i)^2 + (H - h)^2 + \eta(T_0 - \tau_0)^2 =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \omega_iR_i^2(\Psi_i - \psi_i)^2 + (R_0 - r_0)^2 + \eta(T_0 - \tau_0)^2, \tag{11}$$

где $\eta = 1/\Upsilon$; $H = R_3 - R_0$.

Таким образом, приходим к задаче 2. Пусть $\mathcal{H}$ — множество глубин, на которых могут располагаться очаги землетрясений, h — элемент этого множества ($h \in \mathcal{H}$); $\mathcal{T}$ — множество значений времен возникновений землетрясений, τ_0 — элемент этого множества ($t_0 \in \mathcal{T}$). Требуется найти такие $h^* \in \mathcal{H}$ и $\tau_0^* \in \mathcal{T}$, которые обеспечили бы минимум функционалу (11) при условии, что X, Y, Z и T_0 определяются из решения системы линейных алгебраических уравнений (10).

Остановимся на оценках погрешностей в определении параметров гипоцентров далеких землетрясений и вопросах устойчивости решения систем линейных уравнений (5) и (10). Для близких землетрясений эти вопросы изучались в работах [1—3]. Воспользуемся здесь результатами указанных работ.

Оценки погрешностей в определении параметров гипоцентров далеких землетрясений. Запишем системы (5) и (10) в матричном виде:

$$Kp = f, \tag{12}$$

где $p = \{p_j\}$ — искомые параметры; $j = 1, 2, 3$ или $j = 1, 2, 3, 4$; K — матрицы систем; $f = \{f_i\}$; $i = 1, \ldots n$ — наблюдаемые величины.

При условии невырожденности матрицы K^TK решение уравнения (12) дается формулой $p = K^+$, где $K^+ = (K^TK)^{-1}K^T$; «т» означает операцию транспонирования.

Если вектор свободных членов и матрица K заданы с погрешностями $\Delta f \neq 0$ и $\Delta K \neq 0$, то в этом случае для погрешности вектора p имеем уравнение [3]

$$\tilde{K}\Delta p = \Delta f - \Delta Kp, \tag{13}$$

решением которого будет

$$\Delta p = \tilde{K}^+(\Delta f - \Delta Kp).$$

Для погрешностей отдельных компонент Δp_j вектора Δp получаем следующее соотношение:

$$\Delta p_j = \widetilde{K}_j^+ (\Delta f - \Delta K p),$$

где $\widetilde{K}_j^{(+)}$ — вектор-строка матрицы $\widetilde{K}^+$.

Для абсолютного значения j-й компоненты вектора Δp будет иметь место неравенство

$$|\Delta p_j| = |\widetilde{k}_j^{(+)} (\Delta f - \Delta K p)| \le \|\widetilde{k}_j^{(+)}\| \, \|\Delta f - \Delta K p\|, \tag{14}$$

где $\|*\|$ — евклидова норма. Для погрешности полного вектора Δp соответственно имеем

$$\|\Delta p\| \le \|\widetilde{K}^+\| \, \|\Delta f - \Delta K p\|. \tag{14a}$$

Обратимся к системе линейных уравнений (5). Будем считать, что ошибки как в элементах матрицы K, так и в правых частях уравнений обусловлены ошибками только времен прихода волн τ_i, абсолютные значения которых можно принять равными $|\delta\tau_i| = \Phi_i |\Delta\tau|$. Весовой множитель Φ_i характеризует как качество измерений на i-й станции, так и систематическую ошибку, обусловленную отклонением истинных скоростей от принятой модели.

Если $|\delta\tau_i|$ для каждого $i = 1, 2, \ldots, n$ есть средняя величина абсолютного значения погрешностей в определении τ_i, т. е.

$$\Phi_i |\Delta\tau| = \mathscr{E}(|\delta\tau_i|), \text{ то } \Phi_i = \mathscr{E}(|\delta\tau_i|)/|\delta\tau|,$$

$$|\Delta\tau| \ne 0.$$

Нормировочный множитель $|\Delta\tau|$ можно положить равным среднему значению абсолютной погрешности на всех сейсмических станциях, участвующих в наблюдении, т. е. $|\Delta\tau| = \mathscr{E}[\mathscr{E}(|\delta\tau_i|)]$. В этом случае

$$\Phi_i = \frac{\mathscr{E}(|\delta\tau_i|)}{\mathscr{E}[\mathscr{E}(|\delta\tau_i|)]}.$$

Можно положить $|\Delta\tau|$ равным абсолютному значению максимально допустимой ошибки в определении времен прихода сейсмических волн на станции. Тогда $0 \le \Phi_i \le 1$.

Если $|\delta\tau_i|$ представляет собой максимальное значение погрешности в определении τ_i на каждой станции ($i = 1, 2, \ldots, n$), то

$$\Phi_i = |\delta\tau_i| / |\Delta\tau|,$$

причем если $|\delta\tau_i| = |\Delta\tau|$ ($i = 1, 2, \ldots, n$), т. е. $|\delta\tau_i|$ является максимальным значением погрешности, то $\Phi_i = 1$.

Помимо случайных ошибок в определении времен прихода сейсмических волн на станции величины $|\delta\tau_i|$ и, следовательно, Φ_i могут отражать отклонение наблюденных времен пробега сейсмических волн, распространяющихся в реальной неоднородной трехмерной среде, от времен пробега волн, распространяющихся в среде с принятым в интерпретации законом изменения скорости.

Таким образом, весовые множители Φ_i отражают как неравноточность измерений на станциях, так и систематические отклонения в определении τ_i, связанные с неоднородностью реальных сред.

Рассмотрим систему (5). В данном случае $\Delta K = 0$, а $\Delta f \ne 0$. Элементы вектора Δf в этом случае равны $\delta f_i = -\sin(d_i/R_i)\,\delta d_i$. Если принять, что $\delta d_i = \delta\tau_i/\alpha_i$, где $\alpha_i = t_i'$ — производная годографа в соответствующей точке, то

$$\delta f_i = -\sin(d_i/R_i)\,\delta\tau_i/\alpha_i \quad (\alpha_i \ne 0).$$

Для полного вектора погрешности для уравнения (5) будем иметь

$$\|\Delta p\| \leq \|\widetilde{K}^{+}\| \, \|\sin(d/R)\,\Phi/\alpha\| \, \|\Delta\tau\|. \tag{15}$$

Параметры p_j в данном случае равны $p_1 = X_0/r_0$, $p_2 = Y_0/r_0$, $p_3 = Z_0/r_0$.

Пусть система линейных уравнений (13) отвечает случаю, когда неизвестным наряду с X_0, Y_0 и Z_0 является также и T_0. Для нее $\Delta K \neq 0$ и $\Delta \neq 0$, причем $\delta f_i = -\sin(d_i/R_i)\,\delta\tau_i/\alpha_i - \delta t_i \tau_0 v_i^2/(r_0 R_i)$ и $(\Delta Kp)_i = -\delta\tau_i T_0 v_i^2/(r_0 R_i)$. Если положить $\tau_0 \approx T_0$, то получим, что $(\Delta f - \Delta Kp)_i = -\sin(d_i/R_i)\,\delta\tau_i/\alpha_i$. Таким образом, и в этом случае приходим к неравенству (15), а $p_4 = T_0/r_0$.

Отметим некоторые свойства оценок (15). Прежде всего эти оценки неулучшаемы. Это, в частности, означает, что при любых фиксированных значениях параметров в правых частях неравенств всегда можно так подобрать знаки ошибок времен прихода сейсмических волн на станциях, что равенства будут достигаться. Другим свойством оценок является их униформность. Последнее свойство позволяет выработать единый подход к исследованию систем (5) и (10) для различных случаев исходных данных и соответственно для различного набора искомых параметров. Наиболее их важное свойство то, что указанные оценки учитывают погрешности самой матрицы K, что является принципиальным при оценивании погрешностей в случае неизвестных параметров λ, φ, H и T_0.

Пусть погрешности $\delta\tau_i$ в определении времен прихода сейсмических волн на станции являются независимыми величинами, случайные компоненты которых имеют нулевые математические ожидания и конечные дисперсии $\sigma_i^2\,(\Delta f - \Delta Kp)$. Тогда [7] дисперсия оцениваемых параметров будет определяться из соотношения

$$D(\Delta p) = [\widetilde{K}^{+} D^{-1}(\Delta f - \Delta\widetilde{K}p)]^{-1},$$

где $D(\Delta p)$ — ковариационная матрица оцениваемых параметров: $D(\Delta f - \Delta Kp)$ — ковариационная матрица вектора-столбца свободных членов линейной системы. Так как погрешности $\delta\tau_i$ в определении времен прихода сейсмических волн на станции являются независимыми величинами, то матрица $D(\Delta f - \Delta Kp)$ будет диагональной матрицей с элементами, равными $\sin^2(d_i/R_i)\,\sigma_i^2/\alpha_i^2$; σ_i^2 — дисперсии величин $\delta\tau_i$. Соответственно элементы матрицы $D^{-1}(\Delta f - \Delta Kp)$ будут равны $[\sin^2(d_i/R_i)\,\sigma_i^2/\alpha_i^2]^{-1}$.

Выше получены оценки погрешностей в определении неизвестных параметров U, V, W и Q. Найдем оценки для φ, λ, H и T_0. Для T_0 сразу находим $\sigma_T^2 = \sigma_Q^2/r_0^2$. Здесь σ_T^2 и σ_Q^2 — дисперсии параметров T_0 и Q соответственно.

Учитывая, что $U = \cos\varphi\cos\lambda$, $V = \cos\varphi\sin\lambda$ и $W = \sin\varphi$ и беря полное приращение от правых и левых частей этих равенств, для определения $\delta\varphi$ и $\delta\lambda$ будем иметь систему трех линейных алгебраических уравнений относительно двух неизвестных:

$$\begin{aligned} &-\sin\varphi\cos\lambda\,\delta\varphi - \cos\varphi\sin\lambda\,\delta\lambda = \delta U,\\ &-\sin\varphi\sin\lambda\,\delta\varphi + \cos\varphi\cos\lambda\,\delta\lambda = \delta V,\\ &\cos\varphi\,\delta\varphi = \delta W. \end{aligned} \tag{16}$$

Элементы матрицы нормальных уравнений и вектора свободных членов для этой системы равны

$$a_{11} = 1;\quad a_{12} = a_{21} = 0;\quad a_{22} = \cos^2\varphi;\quad a_{13} = \cos\delta W - \sin\varphi(\cos\lambda\delta U + \sin\lambda\delta V);$$

$$a_{23} = \cos\varphi(\cos\lambda\delta V - \sin\lambda\delta U).$$

Следовательно, погрешности в определении φ и λ будут равны

$$\delta\varphi = \cos\varphi\delta W - \sin\varphi(\cos\lambda\delta U - \sin\lambda\delta V);$$

$$\delta\lambda = (\cos\lambda\delta V - \sin\lambda\delta U)/\cos\varphi.$$

Дисперсии σ_φ^2 и σ_λ^2 величин $\delta\varphi$ и $\delta\lambda$ будут равняться значениям диагональных элементов ковариационной матрицы $D(\delta\varphi, \delta\lambda)$, которая в общем случае не является диагональной и равна

$$D(\delta\varphi, \delta\lambda) = [K^T D^{-1}(\delta U, \delta V, \delta W) K]^{-1}.$$

Здесь K — матрица системы (16): $D^{-1}(\delta U, \delta V, \delta W)$ — дисперсионная матрица параметров δU, δV и δW.

Чтобы найти погрешности в определении глубины H гипоцентра, необходимо знать погрешность в определении R_0. Нетрудно проверить, что (здесь для простоты опускаем индекс «0»)

$$\delta R = U\delta X + V\delta Y + W\delta Z, \quad \delta X = r\delta U,$$

$$\delta Y = r\delta V, \quad \delta Z = r\delta W.$$

Следовательно,

$$\delta R = r(U\delta U + V\delta V + W\delta W).$$

Отсюда среднеквадратичное отклонение параметра δR будет равно

$$\sigma_R = r(U^2\sigma_U^2 + V^2\sigma_V^2 + W^2\sigma_W^2)^{1/2};$$

$$\sigma_H = \sigma_R.$$

Устойчивость определения параметров гипоцентров далеких землетрясений и оптимальная геометрия телесейсмической сети. Оценка (14а), являясь мажорантной, дает гарантированную точность в определении параметров гипоцентров далеких землетрясений. Если варьировать координаты точек наблюдений, то можно подобрать такое их положение, при котором оценка (14а) примет минимальное значение. Поскольку правая часть неравенства (14а) представляет собой оценку максимальной погрешности в определении параметров гипоцентров, то приходим к минимаксной задаче определения оптимального размещения сейсмических станций на земном шаре. Таким образом, задачу определения оптимальной геометрии системы наблюдений можно рассматривать как задачу минимизации целевой функции

$$J = \|\widetilde{K}^+\| \, \|\sin(d/R)\,\Phi/\alpha\|,$$

а точнее, некоторого функционала от целевой функции J [3].

Чтобы выявить наиболее общие черты оптимальной системы сейсмологических наблюдений, необходимо подробно рассмотреть целевую функцию J. Представим функцию J в виде произведения двух функций $J_1 = \|\widetilde{K}^+\|$ и $J_2 = \|\sin(d/R)\,\Phi/\alpha\|$ и рассмотрим функцию J_1.

Пусть матрица K является матрицей полного ранга. Тогда для $\|\widetilde{K}^+\|$ справедлива двусторонняя оценка [1]

$$\left(\sum_{j=1}^{m} \frac{1}{\|\widetilde{k}_j\|^2}\right)^{1/2} \le \|\widetilde{K}^+\| \le \left(\frac{\prod_{j=1}^{m} \|\widetilde{k}_j\|^2}{\det(\widetilde{K}^T K)} \sum_{j=1}^{m} \frac{1}{\|\widetilde{k}_j\|^2}\right)^{1/2}.$$

Для числа обусловленности матрицы $\tilde{K}$, равного $\operatorname{cond}(\tilde{K}) = \|\tilde{K}\|\,\|\tilde{K}^+\|$, соответствующая оценка имеет вид

$$\mu(\tilde{K}) \le \operatorname{cond}(\tilde{K}) \le \mu(\tilde{K})/\delta(\tilde{K}),$$

где $\mu(K) = \left(\sum_{j=1}^{m} \frac{1}{\|\tilde{k}_j\|^2} \sum_{j=1}^{m} \|\tilde{k}\|^2\right)^{1/2}$;

$$\delta(\tilde{K}) = \left(\frac{\det(\tilde{K}^T\tilde{K})}{\prod_{j=1}^{m} \|\tilde{k}_j\|^2}\right)^{1/2}.$$

Рассмотрим величины $\delta(K)$ и $\mu(K)$. Величина $\delta(K)$ характеризует скошенность матрицы K и имеет простой геометрический смысл: $\delta(K)$ суть отношение объема параллелепипеда, натянутого на векторы-столбцы матрицы K, к объему прямоугольного параллелепипеда с ребрами той же длины. Очевидно, что $0 \le \delta(K) \le 1$ и равенство $\delta(K) = 1$ достигается в том случае, если векторы-столбцы матрицы K взаимно ортогональны. Если $\delta(K) = 0$, то это означает, что векторы-столбцы матрицы K линейно зависимы и величина $\|K^+\|$ становится неограниченно большой, а система линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) — вырожденной.

Величина $\mu(K) \ge m$ и характеризует неравновесность по столбцам матрицы K. Причем равенство $\mu(K) = m$ достигается, если нормы столбцов матрицы равны между собой, т. е. на равновесных по столбцам матрицах. Если длина одного из векторов-столбцов матрицы K стремится к нулю, то величина $\mu(K)$ и, следовательно, $\|K^+\|$ стремятся к бесконечности. В этом случае СЛАУ также становится вырожденной.

Наиболее устойчивое решение СЛАУ имеет в том случае, когда при фиксированной норме матрицы исходной системы определитель нормальной системы уравнений принимает максимальное значение [1]. В этом случае значение числа обусловленности также принимает максимальное значение. Если рассматривать столбцы матрицы размерности $n \times m$ как векторы в n-мерном пространстве, то максимальному значению определителя нормальной системы соответствует максимальный объем m-мерного параллелепипеда, натянутого на векторы-столбцы матрицы.

Обратимся к системе (5). Запишем для нее матрицу нормальных уравнений:

$$B = K^TK = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{n} u_i^2 & \sum_{i=1}^{n} u_iv_i & \sum_{i=1}^{n} u_iw_i \\ \sum_{i=1}^{n} u_iv_i & \sum_{i=1}^{n} v_i^2 & \sum_{i=1}^{n} v_iw_i \\ \sum_{i=1}^{n} u_iv_i & \sum_{i=1}^{n} v_iw_i & \sum_{i=1}^{n} w_i^2 \end{pmatrix}. \tag{17}$$

Согласно формуле Бине — Коши [6], определитель матрицы B равен

$$\det(B) = \sum_{i_1<i_2<i_3}^{n} \begin{vmatrix} u_{i_1} & v_{i_1} & w_{i_1} \\ u_{i_2} & v_{i_2} & w_{i_2} \\ u_{i_3} & v_{i_3} & w_{i_3} \end{vmatrix}^2. \tag{18}$$

Значение каждого определителя, стоящего под знаком суммы в формуле (18), равняется ушестеренному значению объема тетраэдра с вершинами $M_{i_1}(u_{i_1}, v_{i_1}, w_{i_1})$, $M_{i_2}(u_{i_2}, v_{i_2}, w_{i_2})$, $M_{i_3}(u_{i_3}, v_{i_3}, w_{i_3})$, расположенными на сфере единичного радиуса, и вершиной M_0 (0, 0, 0) в центре этой сферы. Таким образом, определитель матрицы (17) нормальных уравнений равен 36 суммам квадратов объемов всех тетраэдров с вершинами M_0, M_{i_1}, M_{i_2}, M_{i_3}.

Понятно, что если все вершины (кроме той, что совпадает с центром сферы) тетраэдров лежат на одной дуге большого круга, то объемы соответствующих тетраэдров будут равны нулю. Это значит, что если все точки наблюдений лежат на одной дуге большого круга, то определитель системы нормальных уравнений будет равен нулю, а сама система будет вырожденной.

Максимальное значение определитель матрицы (17) примет в том случае, когда сумма квадратов величин объемов всех тетраэдров, вписанных в единичную сферу, будет максимальной. Каждый набор точек на сфере представляет собой набор вершин некоторого многогранника, объем которого равен сумме объемов соответствующих тетраэдров. Известно [5], что многогранник, имеющий самый большой объем среди всех многогранников с данным числом вершин, вписанных в какую-то фиксированную гладкую выпуклую поверхность, обязательно является истинным многогранником, который имеет только треугольные грани, лежащие в различных плоскостях. Чтобы получить численные значения координат точек наблюдений, соответствующие многогранникам с максимальными объемами, необходимо продифференцировать определитель нормальной системы уравнений по соответствующим координатам, приравнять производные к нулю и решить получившуюся систему уравнений.

Обратимся к рассмотрению функции $J_3 = \|\sin(d/R)\,\Phi/\alpha\|$. Понятно, что целевая функция J тем меньше, чем меньше значения функции J_2. При фиксированном положении гипоцентра землетрясения J_2 стремится к нулю при стремлении к нулю d_i. При фиксированном положении точек наблюдений J_2 является функцией координат гипоцентра. Чтобы найти минимум J_2 как функции координат гипоцентра, запишем J_2 в виде

$$J_2 = \left\{ \sum_{i=1}^{n} [1 - (Uu_i + Vv_i + Ww_i)^2]\, \Phi_i/\alpha_i \right\}^{1/2}.$$

Дифференцируя последнее выражение по U, V и W и приравнивая производные к нулю, для определения координат оптимального гипоцентра получим систему линейных уравнений

$$U \sum_{i=1}^{n} u_i^2 \frac{\Phi_i}{\alpha_i} + V \sum_{i=1}^{n} u_i v_i \frac{\Phi_i}{\alpha_i} + W \sum_{i=1}^{n} u_i w_i \frac{\Phi_i}{\alpha_i} = \sum_{i=1}^{n} u_i \frac{\Phi_i}{\alpha_i},$$

$$U \sum_{i=1}^{n} u_i v_i \frac{\Phi_i}{\alpha_i} + V \sum_{i=1}^{n} v_i^2 \frac{\Phi_i}{\alpha_i} + W \sum_{i=1}^{n} v_i w_i \frac{\Phi_i}{\alpha_i} = \sum_{i=1}^{n} v_i \frac{\Phi_i}{\alpha_i},$$

$$U \sum_{i=1}^{n} u_i w_i \frac{\Phi_i}{\alpha_i} + V \sum_{i=1}^{n} w_i v_i \frac{\Phi_i}{\alpha_i} + W \sum_{i=1}^{n} w_i^2 \frac{\Phi_i}{\alpha_i} = \sum_{i=1}^{n} w_i \frac{\Phi_i}{\alpha_i}.$$

Заметим, что матрица этой системы отличается от матрицы нормальных уравнений для системы (5) только множителями Φ_i/α_i и, следовательно, для нее справедливы рассуждения, приведенные выше.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Бурмин В. Ю.* Задача планирования эксперимента и обусловленность систем линейных алгебраических уравнений//Изв. АН СССР. Техн. кибернетика. 1976. № 2. С. 195—200.
2. *Бурмин В. Ю.* Алгоритм определения координат гипоцентров близких землетрясений и скорости распространения сейсмических волн в слое//Вулканология и сейсмология. 1983. № 5. С. 81—90.

3. *Бурмин В. Ю.* Оптимальное расположение сейсмических станций при регистрации близких землетрясений//Изв. АН СССР. Физика Земли. 1985. № 5. С. 34—42.
4. *Закатов П. С.* Курс высшей геодезии. М.: Недра, 1964. 504 с.
5. *Фейш Тот Л.* Расположение на плоскости, на сфере и в пространстве. М.: Физматгиз, 1958. 364 с.
6. *Фаддеев Д. К., Фаддеева В. Н.* Вычислительные методы линейной алгебры. М.: Физматгиз, 1963. 734 с.
7. *Худсон Д.* Статистика для физиков. М.: Мир, 1970. 296 с.

Институт физики Земли РАН,
Москва

Поступила в редакцию
6.02.1992