ФИЗИКА ЗЕМЛИ, 2001, № 9, с. 19–26

УДК 550.344

АЛГОРИТМ ЧИСЛЕННОГО ПОСТРОЕНИЯ ДИСКРЕТНЫХ C-ОПТИМАЛЬНЫХ ПЛАНОВ (НА ПРИМЕРЕ ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОГО РАЗМЕЩЕНИЯ СЕЙСМИЧЕСКИХ СТАНЦИЙ)

© 2001 г. Фонг Нгуен Ван, В. Ю. Бурмин

Объединенный институт физики Земли им. О.Ю. Шмидта РАН, г. Москва

Поступила в редакцию 12.10.98 г.

Предложен алгоритм MINCOND для численного построения дискретных C-оптимальных планов. Эффективность алгоритма MINCOND проиллюстрирована на примере решения задачи планирования сейсмологических сетей наблюдений. Алгоритм MINCOND позволяет находить C-оптимальные планы большой размерности.

ВВЕДЕНИЕ

Решение многих сейсмологических задач существенно зависит от того, насколько хорошо определены координаты гипоцентров и времена возникновения землетрясений. Хорошо известно, что точность определения этих параметров существенным образом зависит от взаимного расположения станций и положения гипоцентров землетрясений. Поэтому задача определения оптимальной геометрии сети сейсмических станций является актуальной, особенно для областей со сложными контурами границ, в том числе и многосвязных областей. Примерами таких областей могут служить дальневосточная переходная зона (Камчатка, Курильские острова, материковая часть Дальнего Востока России), островная часть Юго–Восточной Азии, горные районы, такие как Кавказ, Тянь-Шань, Памир и др.

В настоящей работе задача планирования эксперимента решается применительно к определению параметров гипоцентров землетрясений, регистрация которых производится системами наблюдений с ограниченным числом точек. В связи с этим рассматриваются только дискретные планы. В теории планирования экспериментов под планом $\xi(N)$ подразумевается множество точек x_i ($i = 1, 2, \ldots, n$), где проводятся наблюдения, и соответствующие значения r_i количества наблюдений в этих точках $\sum_{i=1}^{n} r_i = N$. При этом, если r_i/N может принимать любые значения между 0 и 1, то план называется непрерывным. В противном случае план называется дискретным (Федоров, 1971). Сущность задачи построения дискретного оптимального плана заключается в поиске глобального экстремума некоторой целевой функции, или функционала, определенным образом связанного с выбранным критерием оптимальности. В задачах планирования оптимального эксперимента, выбор того или иного критерия качества эксперимента представляет собой достаточно трудную задачу. Основная трудность заключается в том, что ни один из существующих критериев не отражает в полной мере всех особенностей задач.

Существующие численные методы построения оптимальных планов основываются на том или ином критерии оптимальности планов. Однако на практике задача поиска глобального экстремума произвольного функционала оказывается достаточно сложной, что выражается в неэффективности большинства алгоритмов оптимизации. В связи с этим возникает необходимость нахождения более эффективных алгоритмов и методов для решения такого рода задач, в соответствии с различными критериями оптимальности планов.

В последние годы некоторыми авторами предлагались численные алгоритмы построения дискретных оптимальных планов для различных критериев оптимальности. Большинство из них представляют собой специальные процедуры построения оптимальных планов (так называемые “алгоритмы обмена”) на основе так называемого критерия D-оптимальности, который подразумевает минимизацию определителя соответствующей нормальной системы линейных уравнений (обзор критериев оптимальности см. Федоров, 1971; Бурмин, 1995). При решении задач планирования физических экспериментов, в том случае, когда матрицы планов являются возмущенными и законы распределения ошибок неизвестны (на практике обычно так и бывает), целесообразно использовать нестатистический критерий оптимальности планов, критерий C-оптимальности. Этот критерий впервые был предложен В.Ю. Бурминым [Бурмин, 1976] в развитии идеи о максимальном повышении устойчивости решения обратных задач математической физики [Марчук, 1973; Успенский, Федоров, 1974]. В последнее время критерий C-оптимальности был эффективно применен к решению планирования эксперимента в сейсмологии, теплофизике и т.д. [Бурмин, 1986; 1994; Алифанов и др., 1988].

В настоящей статье предлагается алгоритм построения оптимальных дискретных планов на основе критерия C-оптимальности. Алгоритм представляет собой модификацию процедур случайного глобального поиска в глобальной оптимизации функций многих переменных и процедуры обмена построения оптимальных планов. Эффективность алгоритма подтверждается результатами решения задачи оптимального планирования региональных сетей сейсмологических наблюдений, например, для Армянской сети [Аветисян и др., 1999].

КРИТЕРИЙ C-ОПТИМАЛЬНОСТИ

Пусть целью эксперимента является отыскания оценок некоторых неизвестных параметров p, которые линейным образом связаны с наблюденными величинами f. Запишем эту связь в матричном виде:

$$Kp = f, \tag{1}$$

где K – матрица полного ранга.

Предположим, что матрица K и вектор свободных членов f заданы с погрешностями ΔK и Δf. Эти погрешности могут быть как случайными, так и систематическими. Тогда для определения Δp можно записать систему линейных алгебраических уравнений, которая так же может быть представлена в матричном виде (Бурмин, 1995)

$$\tilde{K}\,\Delta p = \Delta f - \Delta K p, \tag{2}$$

где $\tilde{K}$ – возмущенная матрица, равная $\tilde{K} = K + \Delta K$.

Задача планирования эксперимента в данном случае заключается в том, чтобы так разместить точки наблюдения, чтобы при заданных ΔK и Δf соответствующая норма Δp приняла минимальное значение.

Решение уравнения (2) запишется в виде

$$\Delta p = (\tilde{K}^T \tilde{K})^{-1} \tilde{K}^T (\Delta f - \Delta K p) = \tilde{K}^+ (\Delta f - \Delta K p).$$

При этом справедливы оценки:

$$\|\Delta p\| \le \|\tilde{K}^+\| (\|\Delta K\| \|p\| + \|\Delta f\|), \tag{3}$$

$$\frac{\|\Delta p\|}{\|p\|} \le \|\tilde{K}\| \|\tilde{K}^+\| \left(\frac{\|\Delta f\|}{\|\tilde{f}\|} + \frac{\|\Delta K\|}{\|\tilde{K}\|} \right) \frac{\|K\|}{\|\tilde{K}\|}, \tag{4}$$

где символ $\|\circ\|$ обозначает норму векторов и матриц, в общем случае произвольную.

Отношения (3) и (4) дают оценки абсолютного и относительного уклонения вектора p соответственно. Легко видеть, что эти оценки тем меньше, чем меньше величины $\|\tilde{K}^+\|$ и $\|\tilde{K}\| \|\tilde{K}^+\|$.

Таким образом, задачу планирования эксперимента целесообразно сводить к задаче минимизации величин $\|\tilde{K}^+\|$ или $\|\tilde{K}\| \|\tilde{K}^+\|$. Величина $\mathrm{cond}(\tilde{K}) = \|\tilde{K}\| \|\tilde{K}^+\|$ называется числом обусловленности матрицы $\tilde{K}$. Ограниченность величины $\mathrm{cond}(\tilde{K})$ является необходимым и достаточным условием корректности задачи решения системы (1), а критерий оптимальности, связанный с минимизацией $\|\tilde{K}^+\|$ или $\mathrm{cond}(\tilde{K})$ называется критерием C-оптимальности [Бурмин, 1976, 1995].

Кроме этого, следует еще отметить, что все вычислительные свойства большинства алгоритмов для решения системы (1) в значительной степени зависит от оператора $\tilde{K}^+$ [Леонов, 1987; Михлин, 1988], поэтому выполнение критерия C-оптимальности является необходимым и достаточным условием устойчивости решения системы (1).

АЛГОРИТМЫ ТИПА “ОБМЕНА” ДЛЯ ПОСТРОЕНИЯ ДИСКРЕТНЫХ ОПТИМАЛЬНЫХ ПЛАНОВ

Существующие алгоритмы построения оптимальных планов делятся на две группы, в зависимости от характера наблюдений. В первой группе алгоритмов поиск оптимальных планов осуществляется на ограниченном множестве планов, с конечным числом измерений в каждой точке наблюдений (так называемые дискретные планы). Во второй группе поиск оптимальных планов осуществляется на множествах с произвольным числом измерений в точках наблюдений (так называемые непрерывные планы). Заметим, что из-за отсутствия эффективных алгоритмов поиска оптимальных дискретных планов для решения этой задачи часто используются алгоритмы второй группы, что, конечно, является грубым приближением.

Остановимся на некоторых известных алгоритмах построения оптимальных дискретных планов. В основном все эти алгоритмы относятся к так называемым “алгоритмам обмена” [Fedorov, 1986]. Наиболее известными из них являются два следующих алгоритма:

Алгоритм В.В. Федорова

Предположим, что в некотором физическом эксперименте наблюдения проводятся в N точках. Пусть S множество дискретных планов $\xi(N) \subset S$, состоящее из L измерений, или точек “кандидатов”, которые представляют собой возможные точки наблюдений и количество измерений в них в данном эксперименте. Собственно число измерений в эксперименте равно N и много меньше числа L, т.е. $L \gg N$. Задача состоит в нахождении оптимального плана $\xi^*(N) \subset S$, отвечающего некоторому заданному критерию.

Поиск оптимального плана эксперимента проводится следующим образом [Федоров, 1971]. Сначала, произвольным образом определяется невырожденный начальный план $\xi_0(N) \subset S$. План называется невырожденным, если определитель матрицы соответствующей нормальной системы уравнений отличен от нуля. Затем одно измерение из точки x_i^+ переносится в другую точку x_j^- (x_i^+, $x_j^- \subset \subset \xi_0$) и в соответствии с выбранным критерием оптимальности определяется наилучший план ξ_1 и так далее. Процесс выбора пары точек (x_i^+, x_j^-) для изменения текущего плана $\xi(N) \subset S$ контролируется некоторой функцией, которая связана с ковариационными матрицами планов, т.е. с матрицами оцениваемых параметров [Федоров, 1971]. Эта процедура порождает последовательность планов, сходящихся в соответствии с выбранным критерием к плану, который лучше, чем начальный план, но тем не менее не всегда является оптимальным планом.

Алгоритм DETMAX

Алгоритм DETMAX предложен Т. Митчеллом [Mitchell, 1974] на основе алгоритма, предложенного в работе [Wynn, 1970] для построения оптимальных планов по критерию D-оптимальности. Этот алгоритм так же является “алгоритмом обмена” и в некотором роде подобен алгоритму Федорова. Сначала процедура поиска случайным образом выбирает невырожденный начальный план. Затем процедура изменяет этот план в сторону улучшения путем последовательного обмена точек. В отличие от алгоритма Федорова, в этом алгоритме в качестве функции, контролирующей выбор пары точек обмена, используются собственно дисперсии оценок погрешностей искомых величин. Эта процедура тоже порождает последовательность планов, сходящихся к некоторому плану, лучшему, чем начальный план.

Следует отметить, что оба алгоритма – Федорова и Wynn–Mitchell являются алгоритмами одновременного обмена одной пары точек и не всегда гарантируют сходимость к оптимальному плану.

Модификации алгоритмов типа Федорова и DETMAX с целью повышения скорости сходимости алгоритма, а также вероятности нахождения точного оптимального плана предлагались в ряде последующих работа [Atwood, 1973; Wu, 1978; Galil, Kiefer, 1980; Cook, Nachtsheim, 1980; Johnson, Nachtsheim, 1983; Wienich, 1986; Atkinson and Donev, 1988]. Детальное сравнение этих алгоритмов было проведено в работах [Cook, Nachtsheim, 1980, Fedorov, 1986]. Практически все эти алгоритмы являются алгоритмами обмена одной пары точек.

Х. Йончев [Yonchev, 1988] предложил алгоритм, названный им FDOV, для построения D-оптимальных планов, который представляет собой модификацию алгоритма DETMAX с использованием процедуры обмена конечного числа $M \geq 1$ точек. Алгоритм состоит из двух этапов. На первом этапе определяется некоторое подмножество $P \subset S$, содержащее M точек, где S – множество L точек кандидатов ($M \leq L$). Подмножество точек P выбирается случайным образом и включается в начальный план $\xi_0(N) \subset S$. Начальный план $\xi_0(N)$ выбирается, как и в других алгоритмах, случайным образом. В результате имеем новый план $\xi_1(N \cup M) \subset S$. На втором этапе из множества точек $N \cup M$ выбрасываются по одной точке из M точек таким образом, чтобы каждый новый план, после выбрасывания одной точки, обеспечивал минимальное значение дисперсии оценок погрешностей искомых параметров. И так далее. Таким образом, эта процедура порождает последовательность планов, сходящихся к наилучшему плану. Как отмечает автор, в 50% случаев алгоритм FDOV оказывается более эффективным по сравнению с алгоритмами Федорова и DETMAX [Yonchev, 1988]. Тем не менее, алгоритм FDOV так же не гарантирует получение оптимального плана.

Медленная сходимость и невысокая вероятность поиска оптимального плана существующих алгоритмов обмена связана с тем, что на каждом последующем шаге не используется информация о точках кандидатах привлекавшихся к поиску оптимального плана на предыдущих этапах. В связи с этим, возникает задача поиска новых, более эффективных алгоритмов построения дискретных оптимальных планов. В настоящей работе предлагается алгоритм построения дискретного C-оптимального плана, который, как показывает численное моделирование, эффективнее упомянутых выше алгоритмов.

АЛГОРИТМ MINCOND ПОСТРОЕНИЯ C-ОПТИМАЛЬНОГО ПЛАНА

Блок-схема алгоритма

Процедура поиска оптимального плана в предлагаемом алгоритме состоит из двух этапов. Первый этап заключается в поиске C-оптимального плана на основе модифицированной процедуры обмена конечного числа точек, т.е. процедуры обмена при условии, что на каждом последующем шаге из рассмотрения исключаются точки, которые уже участвовали в обмене на предыдущих шагах. На втором этапе осуществляется уточнение оптимального плана путем последовательного уменьшения размерности подмножества P, или числа варьируемых точек обмена. Блок-схема алгоритма показана на рисунке (а).

Остановимся более подробно на алгоритме. *Первый этап алгоритма* состоит из двух циклов: внешнего и внутреннего. Внешний цикл первого этапа заключается в определении случайных начальных планов (точек), покрывающих все множество точек кандидатов. Причем каждый последующий начальный план, кроме первого, строится после того, как получен наилучший план на предыдущем шаге цикла, или квазиоптимальный план и учитывает полученный результат.

Во внутреннем цикле для каждого начального покрытия осуществляется модифицированная процедура обмена, которая заключается в следующем. Прежде всего, задается множество точек кандидатов (МТК). МТК должно представлять собой регулярную сетку точек, шаг которой выбирается в соответствии с критерием различимости планов, т.е. при замене любой точки плана на ближайшую точку, соответствующие планы должны быть различимы. При этом два плана считаются различимыми, или неэквивалентными, если выполняется соотношение:

$$|\Phi(\xi_1) - \Phi(\xi_2)| > \sigma, \tag{5}$$

где Φ – критерий качества эксперимента; σ – заданная положительная величина.

Строим последовательность k подмножеств точек $\{P_i\}$ ($i = 1, 2, 3, \ldots, k$). Обозначим через $\xi_i(N)$ план, который получился в результате процесса обмена на i-м шаге. Каждое подмножество P_i ($P_i \subset S$) состоит из M точек, которые задаются случайным образом, но так, чтобы выполнялось условие $P_i \cap \xi^j_{i-1}(N) = \varnothing$, здесь $\varnothing$ – пустое множество. Это означает, что точки, которые участвуют в обмене, на i-м шаге не должны совпадать с точками плана, полученного на $(i-1)$-м шаге. Будем называть два плана несовпадающими, если они удовлетворяют условию: $\rho(\xi^{j+1}(N), \xi^j(N)) > \varepsilon$, где ρ – характеризует близость точек кандидатов двух планов в метрике, определение которой будет дано ниже, а ε – заданное положительное число. Число k выбирается из условия $\bigcup_i^k P_i = S$, т.е. чтобы объединение всех подмножеств P_i покрывало все множество S. Последовательность $\{P_i\}$ порождает не возрастающую последовательность $\|K_i^+\|$ ($i = 1, 2, \ldots, k$), сходящуюся по норме к некоторой матрице, соответствующей квазиоптимальному плану $\xi_k(N)$.

Эта процедура проводится на множество всех заданных случайных начальных планов. Чтобы увеличить вероятность определения оптимального плана необходимо иметь максимальное число несовпадающих начальных планов, покрывающих все множество S. Однако увеличение числа начальных планов приводит к существенному увеличению времени счета за счет повторения вычислений, что зачастую бывает не желательным. В этом случае встает задача определения минимальной совокупности начальных планов при максимальной эффективности поиска оптимального плана, т.е. задача поиска оптимальной совокупности начальных планов. Для того чтобы выбрать оптимальное число начальных планов рассмотрим следующую процедуру.

Обозначим через $\mathfrak{R}(\xi^j(N))$ последовательность операторов обмена, которые действуют на множестве планов в каждом внутреннем цикле j, т.е. $\mathfrak{R}(\xi^{j-1}(N) = \xi^j(N)$, а через $\xi^j_k(N)$ квазиоптимальный план, который получается в конце каждого внутреннего цикла.

Построим шар $B(\xi^j_k, \varepsilon)$ радиуса ε, центром которого является квазиоптимальный план $\xi^j_k(N)$:

$$\begin{aligned} &B(\xi^j_k, \varepsilon) = \\ &= \{(\xi^{j+1}(N)) \subset S, \rho(\xi^{j+1}(N), \xi^j_k(N)) \le \varepsilon\}, \end{aligned} \tag{6}$$

где ρ – метрика, которая задается следующим образом:

$$\begin{aligned} &\rho(\xi^{j+1}, \xi^j_k(N)) = \\ &= \sup(\alpha_1\rho_1 + \alpha_2\rho_2), \xi^{j+1}, \xi^j_k(N) \subset S, \end{aligned} \tag{7}$$

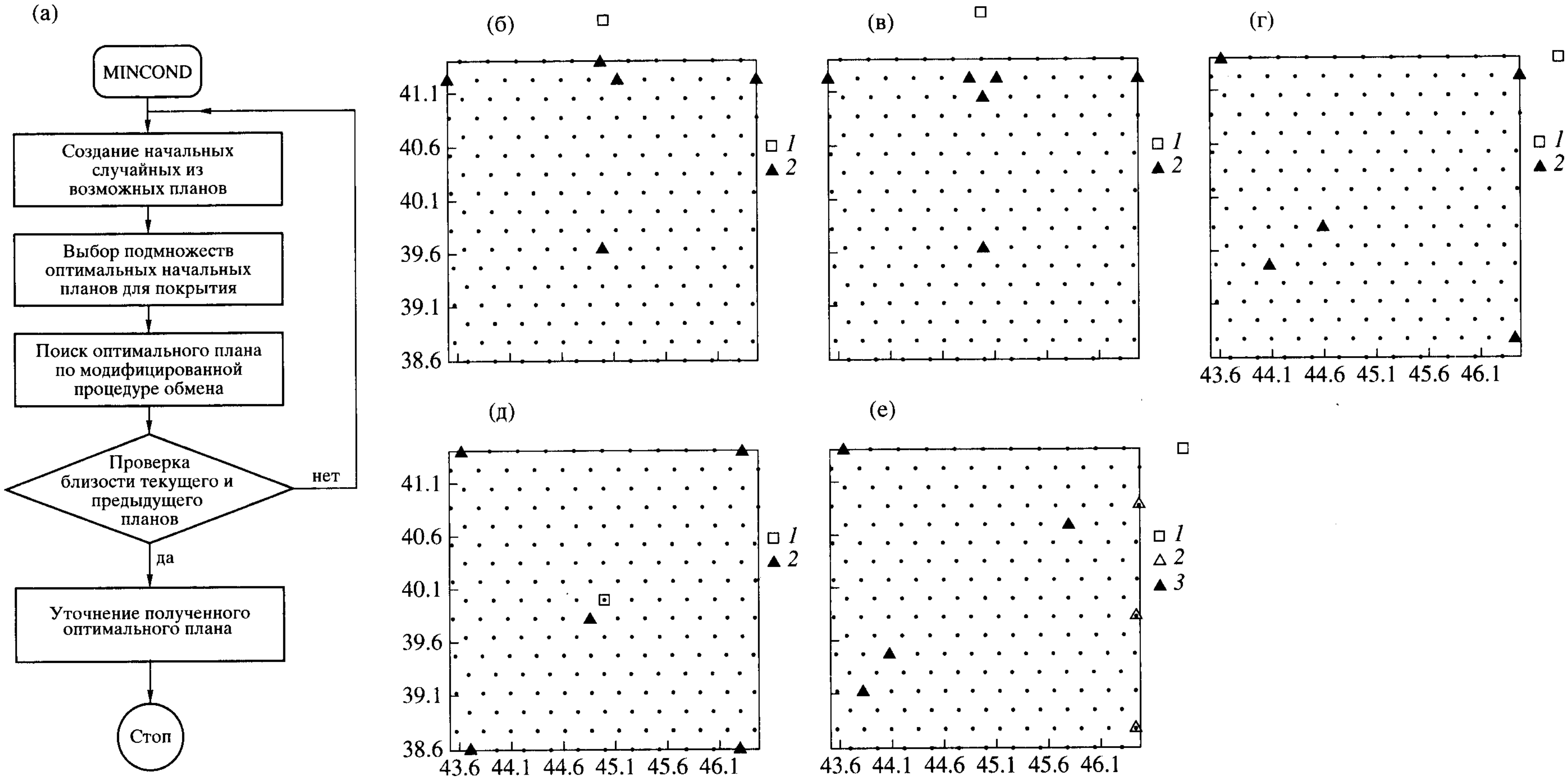
где $\rho_1 = [\sum_{i=1}^N (\varphi_i^{j+1} - \varphi^j_{ik})^2 + (\lambda_i^{j+1} - \lambda^j_{ik})^2]^{1/2}$; $\rho_2 = \| \|K^+(\xi^{j+1}(N)\| - \|K^+(\xi^j_k(N)\| \|$; φ_i^{j+1}, λ_i^{j+1}; φ^j_{ik}, λ^j_{ik} – координаты точек соответствующих планов ξ^{j+1}, $-\xi^j_k(N)$ ($i = \overline{1, N}$); $\alpha_1, \alpha_2 \ge 0$ – заданные веса.

В результате работы внешнего цикла получаем некоторое множество шаров. Положим $Z_r = \bigcup_{j=1}^r B(\xi^j_k, \varepsilon)$.

На каждом шаге внешнего цикла поиск оптимального плана начинается с начального плана, который не попадает ни в один из шаров, построенных на ранних шагах внешнего цикла. В процессе поиска, новый начальный план строится на множестве $Q = (S \setminus Z_r)$. Поиск оптимального плана прекращается, когда $Q = \varnothing$, т.е. когда начальные планы исчерпают все множество S.

В результате первого этапа поиска оптимального плана получим последовательность квазиоптимальных планов, которая содержит наилучший план $\xi^*(N)$ из всей последовательности.

Второй этап алгоритма заключается в уточнении квазиоптимального плана. Процедура уточнения проводится следующим образом. Фиксируем одну точку из $\xi^*(N)$ и осуществляем поиск опти-



а – блок-схема алгоритма; б – расположение гипоцентра (*1*) и оптимальной системы 5-х точек наблюдений (*2*); в – расположение гипоцентра (*1*) и оптимальной системы 6-х точек наблюдений (*2*); г – расположение гипоцентра (*1*) и оптимальной системы 5-х точек наблюдений (*2*); д – расположение гипоцентра (*1*) и оптимальной системы 5-х точек наблюдений (*2*); е – расположение гипоцентра (*1*), существующих точек (*2*) и дополнительных оптимальной системы 4-х точек наблюдений (*3*).

мального плана путем процедуры обмена, которая описана выше, но при условии, что выбранная точка не меняется. В результате получим новый наилучший план $\xi^*_{1,i}(N)$.

Повторяя эту процедуру, фиксируя последовательно все остальные $N-1$ точки из $\xi^*(N)$, получим последовательность наилучших планов $\xi^*_{1,i}(N)$, из которой выберем новый квазиоптимальный план $\xi^*_1(N)$.

Далее повторим всю процедуру, но для плана $\xi^*_1(N)$ и с двумя фиксированными точками, одна из которых остается из предыдущей процедуры и не меняется в процессе поиска, а вторая принадлежит остальным точкам плана $\xi^*_1(N)$ и последовательно заменяется. В результате этого шага получим новый квазиоптимальный план $\xi^*_{2,i}(N)$ и так далее.

Вся процедура продолжается до тех пор, пока число фиксируемых точек не станет равно $N-1$, или пока планы не станут улучшаться. Эта процедура порождает последовательность квазиоптимальных планов, сходящихся по норме к оптимальному плану.

АЛГОРИТМ ПОИСКА ОПТИМАЛЬНОЙ ГЕОМЕТРИИ СЕТИ СЕЙСМОЛОГИЧЕСКИХ НАБЛЮДЕНИЙ

В качестве иллюстрации эффективности алгоритма рассмотрим задачу определения оптимального расположения точек сейсмологических наблюдений при регистрации близких землетрясений. Считаем, что поверхность земли является плоской и, следовательно, система уравнений, связывающих координаты очага землетрясения и координаты регистрирующих станций имеет вид [Бурмин, 1995]:

$$Xx_i + Yy_i + t_0 v^2 t_i - 0.5\eta = f_i, \qquad (8)$$

где $i = 1, 2, \ldots, n \geq 4$; $f_i = 0.5\,(x_i^2 + y_i^2 - v^2 t_i^2)$, $\eta = X^2 + Y^2 + H^2 - v^2\tau_0^2$; X, Y, H и t_0 – координаты гипоцентра и времени возникновения землетрясения (время в очаге); x_i, y_i, t_i – координаты сейсмических станций, зарегистрировавших землетрясение, и времена прихода сейсмических волн на эти станции ($i = \overline{1, n}$); $v_i = \mathrm{const}$ – эффективные скорости распространения сейсмических волн, численно равные отношению расстояния по прямой от i-й станций до гипоцентра к времени пробега сейсмической волны по лучу.

Задача оптимального расположения точек сейсмологических наблюдений заключается в том, что ищутся положения станций на плоскости, обеспечивающие минимальные погрешности и максимальную устойчивость оценок решения системы (8). Согласно критерию C-оптимальности это приводит к поиску системы точек наблюдений $T^* = \{T_i(x, y)\}$ таких, что $\|\tilde{K}^+(T^*)\| = \min\limits_{T \subset \Omega}\|\tilde{K}^+(T)\|$, или $T^* = \operatorname{Arg}\min\limits_{T \subset \Omega}\|\tilde{K}^+\|$, где Ω – область планирования эксперимента.

При планировании оптимальной сети сейсмологических наблюдений на плоскости, выбор МТК играет существенную роль и требует выполнения определенных условий.

Прежде всего необходимо правильно задать тип сетки: треугольную, квадратную, пятиугольную и т.д. В соответствии с результатами, полученными ранее [Бурмин, 1995], на плоскости оптимальная сеть сейсмологических наблюдений реализуется на сетке равносторонних треугольников. Таким образом, для определения оптимальной сейсмологической сети МТК следует задавать на треугольной сетке с шагом Δ, которая покрывает всю изучаемую область. Шаг сетки выбирается в соответствии с критерием (5).

Чтобы проиллюстрировать эффективность предлагаемого алгоритма MINCOND, рассмотрим несколько примеров численного решения задачи определения оптимальной сети наблюдений.

Зададим область, ограниченную географическими координатами $\varphi = (43.5°–46.5°)$ и $\lambda = (38.5°–41.5°)$. Покроем эту область произвольным образом треугольной сеткой с шагом $\Delta = 22.5$ км, состоящей из 195 точек кандидатов. Поскольку для любой изучаемой области гипоцентры землетрясений, произошедших к моменту решения задачи оптимизации сети наблюдений, имеют некоторое пространственное распределение, будем определять оптимальную систему относительно центра этого распределения [Бурмин, 1995]. Во всех примерах, для упрощения расчетов, среду зададим однородной, со скоростью распространения продольных волн $v_p = 6.0$ км/с.

Пример 1. Центр распределения находится в точке с координатами: $\varphi° = 45°$, $\lambda° = 41.8°$, $h = 15$ км. Задача заключается в определении оптимальной сети из 5-ти точек наблюдений ($N = 5$).

Зададим в выражениях (5), (6) и (7) значения $\sigma \approx 0.05$; $\varepsilon \approx 0.1$ и $\alpha_1 = \alpha_2 \equiv 1$. Численный эксперимент показывает, что значение величины M, т.е. значение количества точек, одновременно участвующих в обмене, должно лежать в интервале $\mathrm{INT}(N/2) + 1 \leq M \leq N$. В этом случае обеспечивается наиболее быстрая сходимость к оптимальному плану. В данном случае задаем $3 \leq M = 4 \leq 5$. Результат поиска оптимальной геометрии точек наблюдений показан на рисунке (б).

Пример 2. Центр распределения гипоцентров находится там же, где и в примере 1, а задача заключается в поиске оптимальной системы из 6-ти станций. Величина M так же была заданной равной 4. На рисунке (в) показана оптимальная схема расположения точек наблюдений, полученная в результате решения.

Заметим, что в обоих случаях ближайшие к гипоцентру, соответственно, две и три точки наблюдений располагаются практически в одной точке (разница в положении точек на один шаг сетки является необходимым условием работы программы, даже если точки совпадают). Фактически в обоих случаях оптимальная система наблюдений состоит из четырех точек, что согласуется общими положениями теории планирования систем сейсмологических наблюдений [Бурмин, 1995].

Пример 3. Центр распределения гипоцентров землетрясений находится в точке с координатами $\varphi° = 46.85°$, $\lambda° = 41.4°$, $h = 15$ км. Задача заключается в поиске оптимальной системы из 5-ти точек наблюдений. Схема оптимального расположения 5-ти точек наблюдений представлена на рисунке (г).

Пример 4. Центр распределения гипоцентров землетрясений в этом примере находится в самом центре планируемой области, в точке с координатами $\varphi° = 45°$, $\lambda° = 40°$, $h = 15$ км. Задача заключается в нахождении оптимальной геометрии сети 5-ти точек. Результат вычислений показан на рисунке (д).

Пример 5. В этом примере предполагается, что в области уже существуют три точки наблюдения, расположенные на краю области в точках с координатами $\varphi_1 = 46.45°$, $\lambda_1 = 38.76°$; $\lambda_2 = 46.45°$, $\varphi_2 = 39.8°$; $\varphi_3 = 46.45°$, $\lambda_3 = 40.87°$; а центр распределения гипоцентров землетрясений попадает в точку с координатами $\varphi° = 46.85°$, $\lambda° = 41.4°$, $h = 15$ км на рисунке (е). Задача заключается в оптимальном дополнении к данной системе еще 4-х точек наблюдений. Результат вычислений, схема оптимального расположения четырех дополнительных точек наблюдений показана на рисунке (е).

В работе (Rabinowitz, Steinberg, 1990) на аналогичных примерах приведены результаты определения оптимальных систем наблюдений с помощью алгоритма DETMAX. Следует заметить, что приведенные в этой работе результаты расчетов не соответствуют оптимальным планам. Это может являться следствием двух причин. Первая – это плохая сходимость в данном алгоритме последовательности планов к оптимальному плану. Вторая – это то, что авторы принимают за основу линеаризованный подход к определению параметров гипоцентров землетрясений (координат и времени в очаге), который заключается в разложении функционала невязки в ряд Тейлора в окрестности решения. Уравнения, которые получаются в результате такой линеаризации, имеют локальный характер, и, как следствие, задача планирования сети наблюдений так же имеет локальный характер, а ее решение в значительной степени зависит от начального приближения.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящей статье описан алгоритм (MINCOND) численного построения дискретных C-оптимальных планов. В алгоритме получено сочетание достоинства процедуры случайного глобального поиска в глобальной оптимизации функций многих переменных и процедуры обмена построения оптимальных планов. Результаты численного моделирования позволяют сделать вывод об эффективности алгоритма по сравнению с известными аналогичными алгоритмами, основанными на других критериях оптимальности и других стратегиях поиска оптимальных планов.

Результаты математического моделирования, приведенные выше, получены в предположении, что скорость распространения сейсмических волн в среде постоянна. Реальные среды имеют более сложную структуру и скорости в них меняются как по глубине, так и по горизонтали. Однако это обстоятельство практически никак не сказывается на результатах выбора оптимальных сетей по той простой причине, что матрица плана в данном случае очень слабо зависит от распределения скоростей сейсмических волн, а ее свойства определяются исключительно координатами точек наблюдений. В тоже время такое упрощение существенно снижает время работы алгоритма. Этот вопрос ранее был рассмотрен в работе [Бурмин, 1995].

Предложенная стратегия поиска оптимального плана на основе критерия C-оптимальности может быть использована для построения оптимальных планов на основе других критериев качества планов. При использовании алгоритма MINCOND можно находить оптимальные системы наблюдений для решения ряда других задач в геофизике, в частности для решения задач сейсмотомографии.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

Аветисян А.М., Бурмин В.Ю., Нгуен Ван Фонг. Оптимальная сеть сейсмологических наблюдений на территории Армении // Бюллетень строителей Армении. 1999. № 4. С. 41–43.

Алифанов О.М., Артюхин Е.А., Румянцев С.В. Экстремальные методы решения некорректных задач. М.: Наука. 1988. 285 с.

Бурмин В.Ю. Задача планирования эксперимента и обусловленность систем линейных алгебраических уравнений // Изв. АН СССР. Техническая кибернетика. 1976. № 2. С. 195–200.

Бурмин В.Ю. Оптимизация сейсмических наблюдений и определение координат землетрясений. М.: ОИФЗ РАН. 1995. 184 с.

Леонов А.С. Метод минимальной псевдообратной матрицы // ЖВМ и МФ. 1987. Т. 27. № 8. С. 1123–1138.

Марчук Г.И. Методы вычислительной математики. Новосибирск: Наука. 1973. 352 с.

Михлин С.Г. Некоторые вопросы теории погрешностей. Изд-во ЛГУ. 1988. 333 с.

Федоров В.В. Теория оптимального эксперимента. М.: Наука. 1971. 312 с.

Успенский А.Б., Федоров В.В. Планирование эксперимента в некоторых задачах математической физики // Кибернетика. 1974. № 4. С. 123–128.

Atwood C.L. Sequences converging to *D*-optimal designs of experiments // The Ann. Statist. 1973. № 1. P. 342–352.

Atkinson A.C., Donev A.N. Algorithms, Exact designs and bloking in response sruface and mixture designs // Optimal desing and analysis of experiments. Holland. 1988. 368 p.

Cook R.D., Nachtsheim C.J. Comparision of algorithms for constructing exact *D*-optimal designs // Tehnometrics. 1980. V. 2. P. 315–324.

Fedorov V. The experimental design of an observation network–Optimal algorithms of the exchange type // WP–86–62 IIASA. 1986. P. 23–30.

Galil Z., Kiefer J. Time and space saving computer methods related to Mitchell's DEMAX for finding *D*-optimum designs // Technometrics. 1980. V. 22. P. 301–313.

Johnson M.E., Nachtsheim C.J. *D*-optimal designs on conves design spaces // Technometrics. 1983. V. 25. P. 271–277.

Mitchell J.J. An algorithm for the construction of *D*-optimal epxerimental designs // Technometrics. 1974. V. 16. P. 203–310.

Rabinowitz N., Steinberg D.M. Optimal configuration of a seismografic network: A statsitical approach // BSSA. 1990. V. 80. № 1. P. 187–196.

Yonchev H. New computer procedures for constructing exact D–optimal designs // Optimal design and analysis of experiments. Holland. 1988. P. 71–80.

Wierich W. On optimal designs and complete class theorems for experiments with continuos and discrete factors of influence // J. Stat. Plan. and Inf. 1986. V. 15. P. 19–27.

Wynn H.P. The sequential generation of *D*-optimum experimental designs // Ann. Math. Stat. 1970. V. 41. P. 1655–1664.

Wu C.F. Some iterative procedures for generating nonsingular optimal designs // Commun. in Stat. 1978. V. 14. № 7. P. 1399–1412.